GEOMETRIA APLICADA - PARTE 3

Elementos de Geometria espacial

A Geometria espacial (euclidiana) funciona como uma ampliação da Geometria plana (euclidiana) e trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Os objetos primitivos do ponto de vista espacial, são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas, ângulos e superfícies. Os principais tipos de cálculos que podemos realizar são: comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas. Tomaremos *ponto* e *reta* como conceitos primitivos, os quais serão aceitos sem definição.

Conceitos gerais

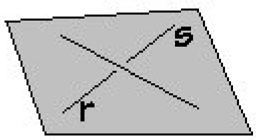
Um **plano** é um subconjunto do espaço R^3 de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contido no conjunto.

Um plano no espaço R^3 pode ser determinado por qualquer uma das situações:

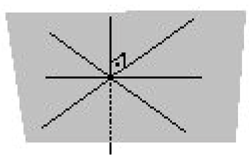
- Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta);
- Um ponto e uma reta que não contem o ponto;
- Um ponto e um segmento de reta que não contem o ponto;
- Duas retas paralelas que não se sobrepõe;
- Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe;
- Duas retas concorrentes;
- Dois segmentos de reta concorrentes.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço R^3 podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

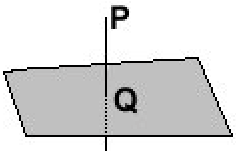
Duas retas são ditas **reversas** quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Pode-se pensar de uma rera **r** desenhada no chão de uma casa e uma reta **s** desenhada no teto dessa mesma casa.



Uma reta é **perpendicular** a um plano no espaço R^3, se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.

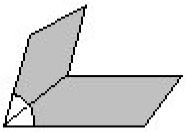


Uma reta **r** é **paralela** a um plano no espaço R^3, se existe uma reta **s** inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.



Seja P um ponto localizado fora de um plano. A **distância do ponto ao plano** é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto que é a interseção entre o plano e o segmento. Se o ponto P estiver no plano, a distância é nula.

Planos concorrentes no espaço R^3 são planos cuja interseção é uma reta. **Planos paralelos** no espaço R^3 são planos que não tem interseção.

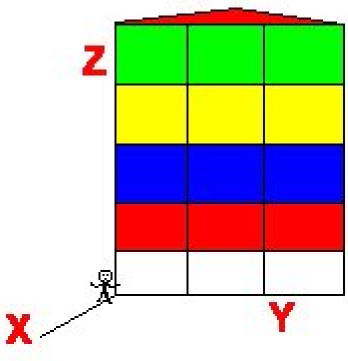


Quando dois planos são concorrentes, dizemos que tais planos formam um **diedro** e o ângulo formado entre estes dois planos é denominado **ângulo diedral**. Para obter este ângulo diedral, basta tomar o ângulo formado por quaisquer duas retas perpendiculares aos planos concorrentes.

Planos normais são aqueles cujo ângulo diedral é um ângulo reto (90 graus).

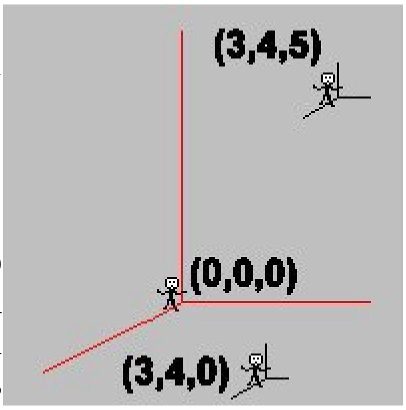
O que é espaço?

O que é o espaço? Reconhecemos e usamos o espaço, mas se alguém perguntar o que é o espaço, muitos irão ter dificuldades em explicar. Na verdade, é mais fácil explicar o que se pode fazer com este ente *primitivo* que não tem definição para nós. Uma primeira tentativa para explicar isto é dizer que é *tudo o que nos envolve* e é o local onde podemos nos mover *para frente*, para o *lado* e para *cima*.



Pelo conceito expresso, observamos que vivemos em um ambiente tridimensional. Basta então conhecer as três direções para identificar a posição relativa que ocupamos. Quando afirmamos que vamos andar para frente, para o lado e para cima, devemos quantificar e identificar o *quanto* iremos nos deslocar nestas direções, logo necessitamos conhecer uma *origem* para o *sistema* e identificar este ponto como (0,0,0) pois esperamos que ele esteja localizado a uma distância num ponto de referência para todos os outros pontos.

O Sistema Cartesiano tridimensional



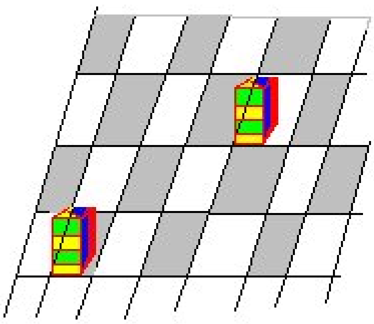
Um procedimento matemático simples é tomar um ponto genérico como:

P=(x,y,z)

onde x indicará a quantidade deslocada na direção positiva do eixo que contem os deslocamentos para frente, y indicará a quantidade deslocada na direção positiva do eixo que contem os deslocamentos para o lado e z indicará a quantidade deslocada na direção positiva do eixo que contem os deslocamentos para cima e para facilitar as coisas do ponto de vista matemático, iremos denominar tais direções por: Eixo OX, Eixo OY e Eixo OZ.

O sistema tri-dimensional é o conjunto de todos os *ternos ordenados* (x,y,z), sendo que ordem não pode ser mudada sob pena de nos deslocarmos para outro lugar. A palavra cartesiano se deve a René Descartes, conhecido como *cartesius*. x recebe o nome de *abscissa*, y o nome de *afastamento* e z o nome de *cota*.

Exemplo: Se um indivíduo está no *centro* da cidade em uma posição O=(0,0,0) e quer andar para a frente 3 quadras, depois andar para o lado 5 quadras e depois subir até o 10o. andar de um prédio a posição final do mesmo após o percurso será o ponto P=(3,5,10) e podemos observar que as unidades não são necessariamente as mesmas. Se este mesmo indivíduo se deslocasse para a posição final P=(3,10,5), certamente chegaria a um lugar diferente.

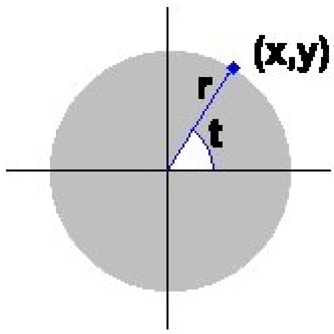


Outros sistemas de localização

Existem outras formas de localização no espaço tridimensional como é o caso do sistema de coordenadas cilíndricas, sistema de coordenadas esféricas, dentre outros. Particularmente importantes são os sistemas de corrdenadas no plano. O sistema cartesiano plano é um caso particular do sistema cartesiano espacial tridimensional, mas existe um outro sistema muito importante que é o sistema de coordenadas polares.

O Sistema de Coordenadas Polares (R^2)

Vamos considerar agora um mundo plano onde os pontos são indicados por P=(x,y). No sistema bidimensional a medida x recebe o nome de *abscissa* e a medida y recebe o nome de *ordenada*.



Existe um sistema que considera uma linha básica horizontal de referência, por exemplo, o Eixo OX indicado positivamente e outra forma de indicar um ponto P=(x,y). Consideremos que a distância da origem O=(0,0) ao ponto P=(x,y) seja indicada por r e que o ângulo formado entre o segmento OP e o Eixo OX indicado positivamente seja indicado por t. Neste caso o ângulo deverá ser um parâmetro tal que $0 \leq t < 2Pi$. Assim, um ponto será indicado por

P=(r,t)
onde

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}$$
$$t = \arctan(y/x)$$

Exemplo: Para um indivíduo pontual se deslocar da origem O=(0,0) ao ponto P=(3,4), ele deverá se deslocar 5 unidades na direção da reta que forma um ângulo de t=36.87 graus com o Eixo OX. Assim, o ponto será descrito como P=(3,4) ou em Coordenadas Polares como: P=(5, 36.87)

A tangente de 36.87 graus = 0.75 = 3/4.

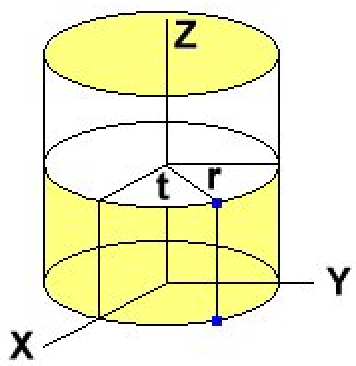
O Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Este sistema considera duas linhas básicas que passam pela origem **O=(0,0,0)**, uma linha de referência no plano do chão como o Eixo OX indicado positivamente, uma outra linha de referência como o Eixo OZ e o ângulo indicado por t e formado pela projeção no plano do chão do segmento OP e o Eixo OX indicado positivamente. O ângulo deverá ser um parâmetro tal que $0 \leq t < 2Pi$. Assim, um ponto P=(x,y,z) será indicado por

P=(r,t,z)

Observamos que este sistema é uma mera ampliação das coordenadas polares, mantendo a mesma coordenada z, conhecida na literatura como a *cota* z.

A idéia básica para indicar um ponto neste sistema é construir um cilindro circular reto com o centro na origem 0=(0,0,0) e que passe exatamente pelo ponto P=(x,y,z). A projeção deste ponto no plano do chão que é indicada pelo plano z=0 é o ponto P_o=(x,y,0) e determinamos as coordenadas polares do par ordenado (x,y) considerado como um ponto de um plano e não do espaço.

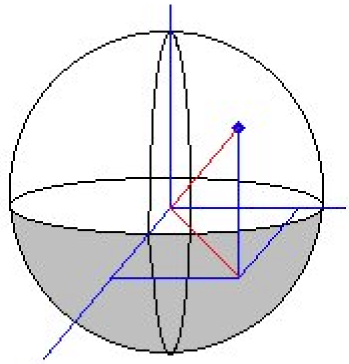


Exemplo: Para um indivíduo se deslocar da origem O=(0,0,0) ao ponto P=(3,4,10), ele deverá se deslocar 5 unidades na direção da reta que forma um ângulo de t=36.87 graus com o Eixo OX e *subir* 10 unidades, logo o ponto será descrito como P=(3,4,10) ou em coordenadas cilíndricas como:

P=(5, 36.87, 10)

O Sistema de Coordenadas Esféricas

Este sistema considera o plano do chão (z=0) que passa pela origem O=(0,0,0) contendo o Eixo OX orientado positivamente e o Eixo OZ orientado positivamente, que é uma linha reta perpendicular ao plano do chão. Neste sistema, o ponto P=(x,y,z) é indicado por três medidas: r a distância entre O=(0,0,0) e o ponto P=(x,y,z), u o ângulo formado entre projeção no plano do chão do segmento OP e o Eixo OX indicado positivamente e v o ângulo formado entre o segmento OP e o Eixo OZ indicado positivamente.



Enquanto o ângulo u pode ser tal que $0 \leq u < 2Pi$ pois a projeção de OP sobre o plano do chão pode dar uma volta completa, o ângulo v pertence ao intervalo $0 \leq v < Pi$, pois este ângulo chega a ser no máximo um ângulo raso.

Assim, um ponto P=(x,y,z) será indicado por

P=(r,u,v)
onde

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$
$$u = \arctan(y/x)$$
$$v = \arccos(z/r)$$

Um Sistema Geográfico

Há um Sistema Geográfico de identificação de posição na face da Terra que leva em consideração outros objetos como: meridianos e paralelos, para indicar a longitude e a latitude do ponto na superfície do globo terrestre. Como uma circunferência de círculo tem um arco com 360 graus, os cientistas dividiram 360 graus por 24 (horas) para obter 15 graus por hora. Consideraram a planificação do globo terrestre e *traçaram* linhas imaginárias geodésicas (verticais) sobre a superfície terrestre que passam pelos polos Norte e Sul e estas são denominadas meridianos e a referência básica foi a cidade de Greenwich (Inglaterra) que tem o meridiano 0. Fizeram o mesmo com linhas horizontais na planificação e denominaram tais linhas de *paralelos*. Hoje podemos observar a localização de uma cidade em qualquer lugar do mundo situada no meridiano M e paralelo P. É lógico que cada local está localizado com a cota z acima do nível do mar, razão pela qual este sistema pode ser indicado como:

P=(M,P,z)

Exemplo: O Terminal Rodoviário da cidade XYZ está localizada na posição (a,b,c). Resolva este problema para a sua cidade.

O Sistema cartesiano R^4

Você já pensou que ao invés de estar num sistema tridimensional como dissemos antes, talvez você esteja num sistema tetradimensional?

Na verdade, vivemos num sistema R^4, pois são necessárias 4 coordenadas para indicar a posição relativa de um objeto.

Um objeto colocado às 12:00 h no ponto (3,4,12) não é o mesmo objeto colocado às 13:00 h no mesmo ponto (3,4,12).

Para entender melhor, exija um sacrifício de uma pessoa e a coloque parada (*se possível, estática*) às 12:00 h em um local de sua casa, que tomaremos como o ponto (3,4,12). Você espera que esta pessoa seja a *mesma* pessoa às 13:00 h? É óbvio que aconteceram modificações no comportamento da mesma, mesmo que você não tenha observado.

Você acha que uma árvore plantada em um local por mais de 20 anos é a mesma a cada instante? O corpo humano também é composto de átomos que se movem a uma velocidade que não pode ser visualizada, assim, um corpo está em constante movimento e dependendo dos estímulos recebidos das mais diversas fontes, terá alteração, logo não será o mesmo de antes, nem mesmo 1 segundo depois!

Até o momento já observamos como é possível estender o conceito de espaço a algo além daquilo que possamos desenhar ou conceber geometricamente.

Uma idéia sobre o R^n

Quando o *governo* calcula a inflação de um determinado período, *ele* afirma que a inflação inf é uma função que depende de várias variáveis como X (xuxu), A (abacate), Co (Condomínio), Ca (Carro), E (Escola), I (Indecisão do governo), D (Dívida Interna), E (etc) e outros "objetos". Uma pessoa normal colocaria o Xuxu ou limão como um dos itens para a análise e cálculo da inflação?

Isto significa a um matemático *sério*, que inf = f(X,A,Co,Ca,E,I,D,E)

e é logico que esta função é bem construída e é consistente, no entanto você não consegue desenhar o gráfico da mesma nesse ambiente tridimensional que você vive. Isto indica que você está trabalhando em um sistema com as 8 coordenadas (X,A,Co,Ca,E,I,D,E), logo você está em R^8. Para obter seriamente a inflação você precisa medir o comportamento de n (ou centenas de) variáveis e não somente de poucas.

Isto não quer dizer que a inflação é uma função construída para enganar o povo. Na verdade, o que deveria ser feito para obter a inflação é a consideração das principais variáveis que causam esta alteração no Sistema Financeiro Nacional, mas uma coisa é óbvia: O governo não leva em consideração os fatores que realmente distorcem o processo inflacionário pois não considera nesses cálculos os fatores que geram tal inflação mas somente alguns elementos da *cesta básica* que nada tem a ver com a realidade nacional.

Com este exemplo, eu espero ter dado uma idéia sobre o significado do espaço R^n, que é uma mera extensão dos espaços bidimensional e tridimensional, nossos velhos conhecidos.

A nossa capacidade ainda é muito pequena para entender um espaço multidimensional R^n.

Observemos a passagem bíblica citada no início deste trabalho, que nos diz que existem outros ambientes (espaços) que o senso de um homem comum é incapaz de conceber.

Ha uma necessidade do ser humano alterar o seu comportamento para ver algo além das coisas comuns desse mundo. Há muitas pessoas que olham para uma parede de uma casa e não conseguem ver nada além dela. Você já se imaginou num quarto de uma casa, pensando exatamente que estivesse no quarto vizinho com todas as coisas boas ou ruins que o mesmo possui? Será que você é daqueles que percorre o trajeto de sua casa até o seu serviço sempre usando o mesmo caminho? Você já pensou que na outra rua existem (coisas ruins e) coisas belas que você nunca percebeu porque nunca passou por lá?

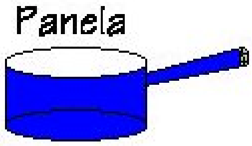
Exercício de criatividade sobre o R^5: Pense em uma pessoa no espaço R^3 e simule a possibilidade dessa pessoa ter duas outras características como idade e beleza. Observamos aqui que este indivíduo *já* é um ente pentadimensional e talvez não tivesse percebido isto, pois além de ser tri-dimensional, ele tem pelo menos 2 outras características.

Exercício para você: Simule as características principais do ser humano e considere tais objetos como coordenadas de um sistema cartesiano.

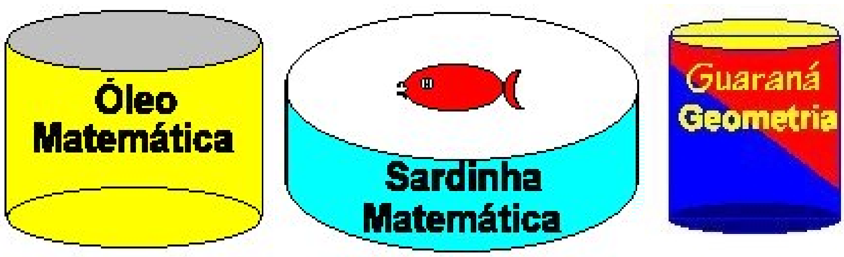
Exercício para o governo: Tome a conta do Condomínio do local onde você mora, faça uma medida mês a mês dos custos de cada item e monte uma função com várias variáveis para determinar o custo mensal condomínio. Analise a variação entre dois meses consecutivos e observe que a inflação de seu condomínio não tem absolutamente nada a ver com a *inflação* do governo.

Introdução aos cilindros

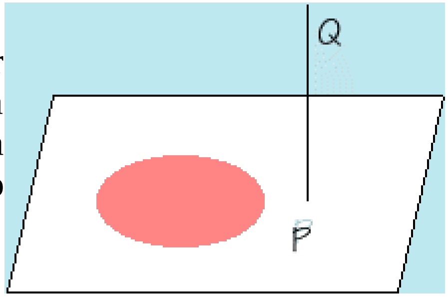
O conceito de cilindro é muito importante. Nas cozinhas encontramos aplicações intensas do uso de cilindros. Nas construções, observamos caixas d'água, ferramentas, objetos, vasos de plantas, todos eles com formas cilíndricas. Existem outras formas cilíndricas diferentes das comuns, como por exemplo o cilindro senoidal obtido pela translação da função seno.



Aplicações práticas: Os cilindros abaixo recomendam alguma aplicação importante em sua vida?



A Construção de cilindros

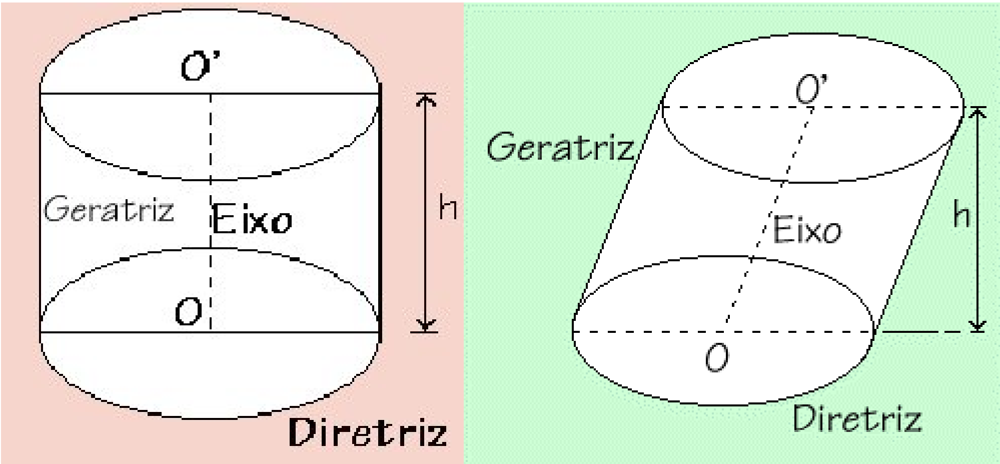


Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r. Tomemos também um segmento de reta PQ que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P.

Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ com uma extremidade no círculo.

Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3, mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro com a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido, usaremos aspas, isto é, *"cilindro"* e quando for à superfície, simplesmente escreveremos *cilindro*.

A reta que contém o segmento PQ é denominada *geratriz* e a curva que fica no plano do "chão" é a *diretriz*.



Em função da inclinação do segmento PQ em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento PQ for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.

Objetos geométricos em um "cilindro"

Num cilindro, podemos identificar vários elementos:

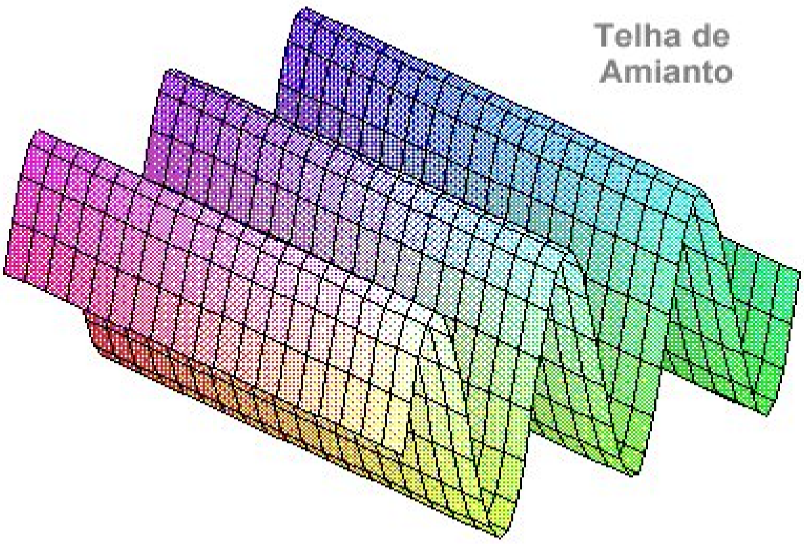
- **Base**
  É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
- **Eixo**
  É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
- **Altura**
  A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
- **Superfície Lateral**
  É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
- **Superfície Total**
  É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
- **Área lateral**
  É a medida da superfície lateral do cilindro.
- **Área total**
  É a medida da superfície total do cilindro.
- **Seção meridiana de um cilindro**
  É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Extensão do conceito de cilindro

As características apresentadas anteriormente para cilindros circulares, são também possíveis para outros tipos de curvas diretrizes, como: elipse, parábola, hipérbole, seno ou outra curva simples e suave num plano.

Mesmo que a diretriz não seja uma curva conhecida, ainda assim existem cilindros obtidos quando a curva diretriz é formada por uma reunião de curvas simples. Por exemplo, se a diretriz é uma curva retangular, temos uma situação patológica e o cilindro recebe o nome especial de *prisma*.

Em função da curva diretriz, o cilindro terá o nome de cilindro: elíptico, parabólico, hiperbólico, sinuzoidal (telha de eternit).



Classificação dos cilindros circulares

- **Cilindro circular oblíquo**
  Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.
- **Cilindro circular reto**
  As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.
- **Cilindro eqüilátero**
  É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

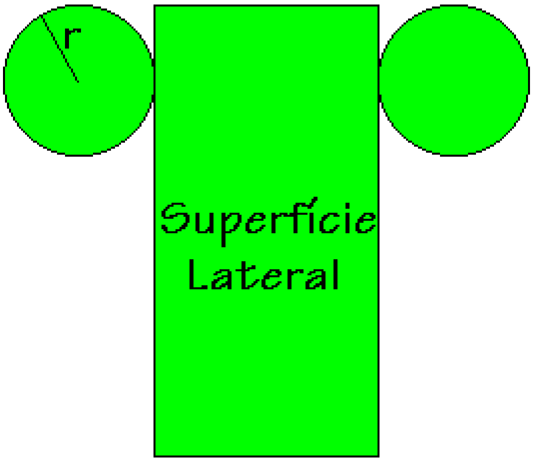
$V = A_{base} \times h$

Se a base é um círculo de raio r, então:

$V = \pi r^2 h$

Exercício: Calcular o volume de um cilindro oblíquo com base elíptica (semi-eixos a e b) e altura h. Sugestão: Veja nesta mesma Página um material sobre a área da região elíptica.

Áreas lateral e total de um cilindro circular reto



Quando temos um cilindro circular reto, a área lateral é dada por:

$A_{lat} = 2\pi r\ h$

onde **r** é o raio da base e **h** é a altura do cilindro.

$A_{tot} = A_{lat} + 2\ A_{base}$

$A_{tot} = 2\pi r\ h + 2\pi r^2$

$A_{tot} = 2\pi r(h+r)$

Exercício: Dado o cilindro circular equilátero (h=2r), calcular a área lateral e a área total.

No cilindro equilátero, a área lateral e a área total são dadas por:

$A_{lat} = 2\pi r.\ 2r = 4\pi r^2$

$A_{tot} = A_{lat} + 2\ A_{base}$

$A_{tot} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

$V = A_{base}\ h = \pi r^2.\ 2r = 2\pi r^3$

Exercício: Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

- Cálculo da Área lateral
  $A_{lat} = 2\pi r\ h = 2\pi 2.3 = 12\pi cm^2$
- Cálculo da Área total
  $A_{tot} = A_{lat} + 2\ A_{base}$
  $A_{tot} = 12\pi + 2\pi 2^2 = 12\pi + 8\pi = 20\pi cm^2$

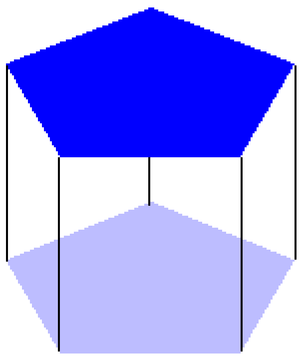
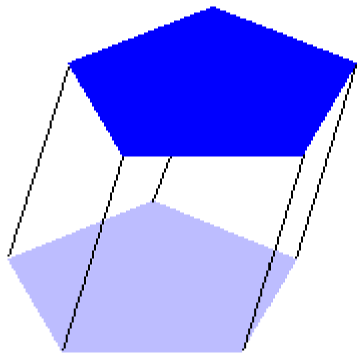
Cálculo do Volume

$V = Abase \times h = \pi r^2 \times h$

$V = \pi 2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12\pi cm^3$

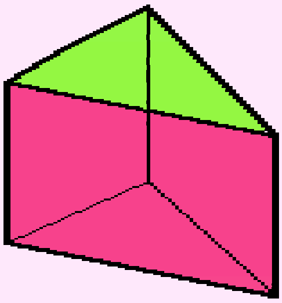
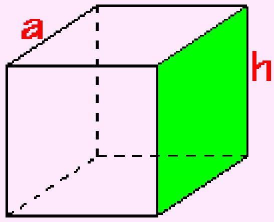
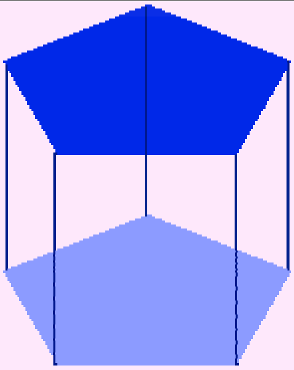
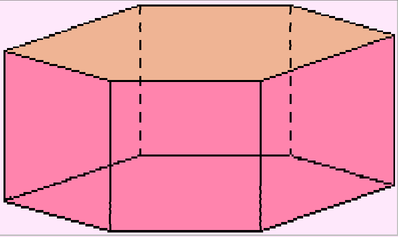
Prisma

Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

	**Bases**: regiões poligonais congruentes **Altura**: distância entre as bases **Arestas laterais paralelas**: mesmas medidas **Faces laterais**: paralelogramos	
Prisma reto	**Aspectos comuns**	**Prisma oblíquo**

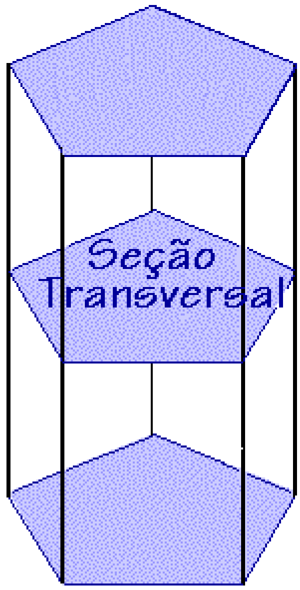
- **Prisma reto**
  As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
  As arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.
  As faces laterais são retangulares.
- **Prisma oblíquo**
  As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
  As arestas laterais são oblíquas ao plano da base.
  As faces laterais não são retangulares.

Quanto à *base*, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

Prisma	Base	Esboço geométrico
Triangular	**triângulo**	
Quadrangular	**quadrado**	
Pentagonal	**pentágono**	
Hexagonal	**hexágono**	

Seções de um prisma

Seção transversal



É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

Seção reta (seção normal)

É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavaliere

Considere um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

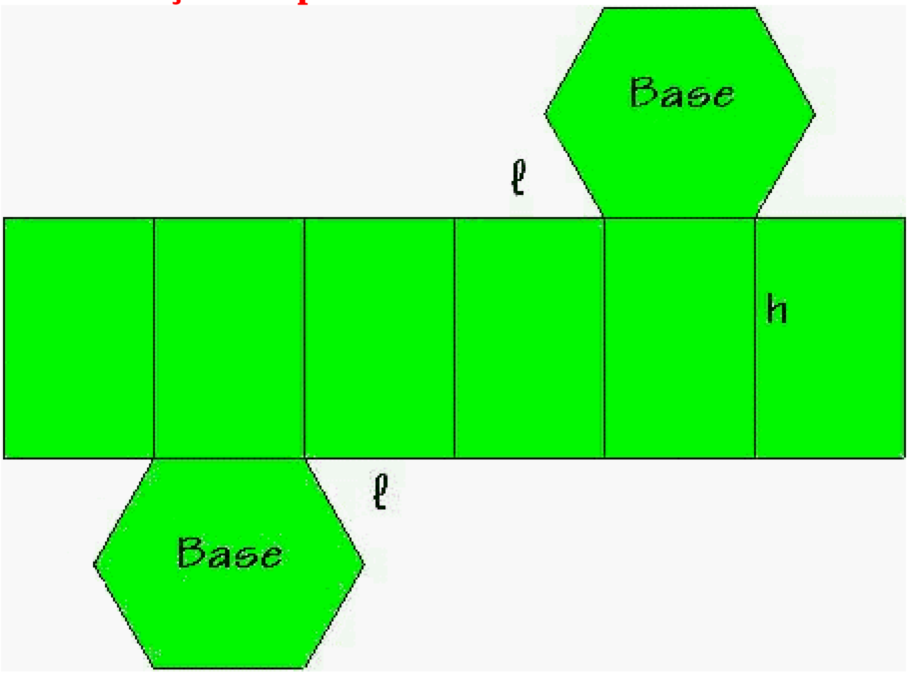
Prisma regular

É um prisma reto, cujas bases são regiões poligonais regulares.

Exemplos:

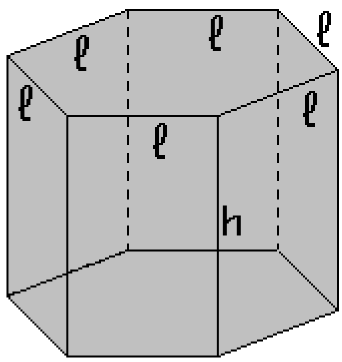
- Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero.
- Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma



Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases. As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano.
Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases.
A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.

Volume de um prisma



O volume de um prisma é dado por:

$\mathbf{V_{prisma} = A_{base} \cdot h}$

Área lateral de um prisma reto com base poligonal regular

A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:

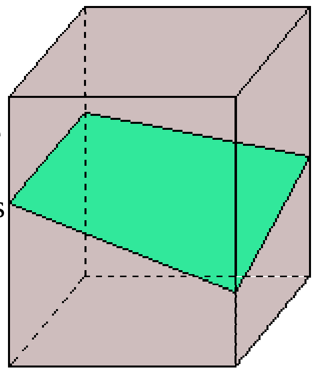
$$\mathbf{A_{lat} = n\ A_{Face\ Lateral}}$$

Uma forma alternativa para obter a área lateral de um prisma reto tendo como base um polígono regular de n lados é:

$$\mathbf{A_{lat} = P \times h}$$

onde P é o perímetro da base e h é a altura do prisma.

Tronco de prisma



Quando seccionamos um prisma por um plano não paralelo aos planos das bases, a região espacial localizada dentro do prisma, acima da base inferior e abaixo do plano seccionante é denominado tronco de prisma. Para calcular o volume do tronco de prisma, multiplicamos a média aritmética das arestas laterais do tronco de prisma pela área da base.

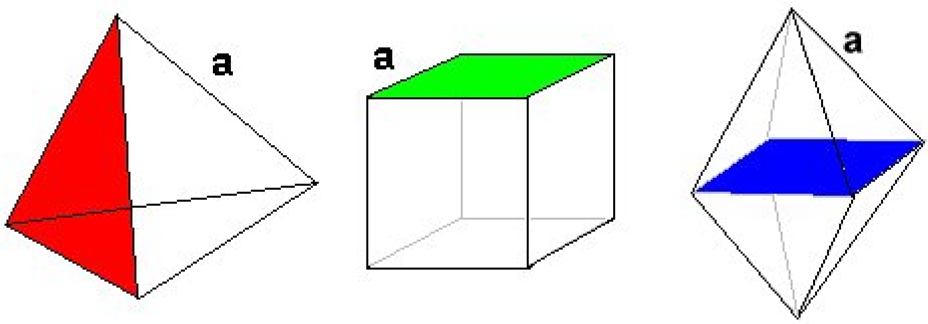
Definição de poliedro

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as **faces** do poliedro. As interseções das faces são as **arestas** do poliedro. As interseções das arestas são os **vértices** do poliedro.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180º. Outra definição: Dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Poliedros Regulares

Um poliedro é dito regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com n lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontra em cada vértice.



Existem algumas características gerais que são válidas para todos os poliedros regulares. Se **n** é o número de lados da região poligonal, **a** é a medida da aresta A e **z=M/V** é a divisão do número de ângulos diedrais pelo número de vértices, então:

Característica geral	Medida
Ângulo diedral	d = 2 arcsen[cos(π/z) cossec(π/n)]
Raio do círculo inscrito	r = (a/2) cot(π/n) tan(d/2)
Raio do círculo circunscrito	R = (a/2) tan(π/z) tan(d/2)
Área superficial	Área = (1/4).z.F.a^2 tan(d/2)
Volume	Vol=(1/24).z.F.a^3 $(\cot(\pi/z))^2$ tan(d/2)

Relações de Euler

Se **V** é o número de vértices, **F** é o número de faces, **A** é o número de arestas e **M** é o número de ângulos entre as arestas de um poliedro convexo, então:

$$V + F = A + 2$$
$$M = 2A$$

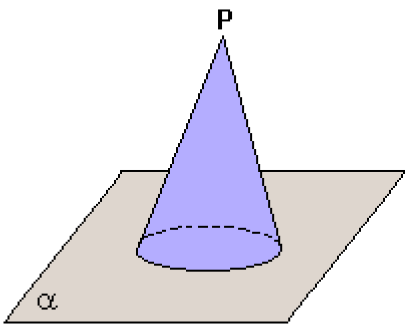
Nome do poliedro	No. de Faces	Poligonal regular	No. de Vértices	No. de Arestas	No. de ângulos entre as arestas
Tetraedro	4	triangular	4	6	12
Hexaedro	6	quadrada	8	12	24
Octaedro	8	triangular	6	12	24
Dodecaedro	12	pentagonal	20	30	60
Isocaedro	20	triangular	12	30	60

Outras medidas em poliedros

Nome	Raio r do círculo inscrito	Raio R do círculo circunscrito	Ângulo diedral d
Tetraedro	(a/12) a √6	(a/4) a √6	70°31'44"
Hexaedro(cubo)	a/2	(a/2) a √3	90°
Octaedro	(a/6)√6	(a/2)√2	109°28'16"
Dodecaedro	(a/100) √(50+22.√5)	(a/4)(√3+√15)	116°33'54
Icosaedro	(a/2)√((7+3√5)/6)	(a/4)√(10+2√5)	138°11'23"

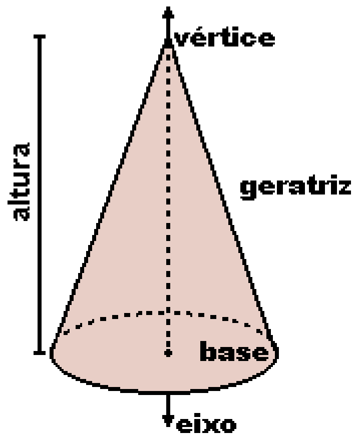
Nome	Área	Volume
Tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$(1/12)\ a^3\sqrt{2}$
Hexaedro(cubo)	$6\ a^2$	a^3
Octaedro	$2\ a^2\sqrt{3}$	$(1/3)\ a^3\sqrt{2}$
Dodecaedro	$3a^2\sqrt{(25+10\sqrt{5})}$	$(1/4)\ a^3(15+7\sqrt{5})$
Icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$(5/12)\ a^3(3+\sqrt{5})$

O conceito de cone



Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

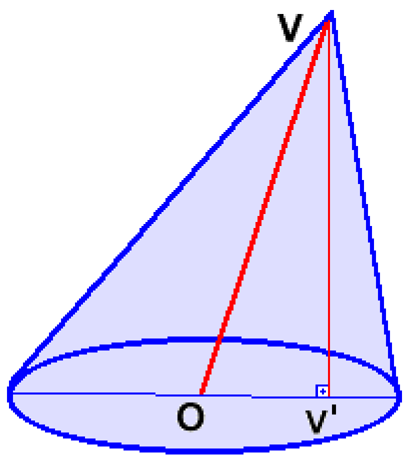
Elementos do cone



- **Base**: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
- **Vértice**: O vértice do cone é o ponto P.
- **Eixo**: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- **Geratriz**: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- **Altura**: Distância do vértice do cone ao plano da base.
- **Superfície lateral**: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
- **Superfície do cone**: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
- **Seção meridiana**: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

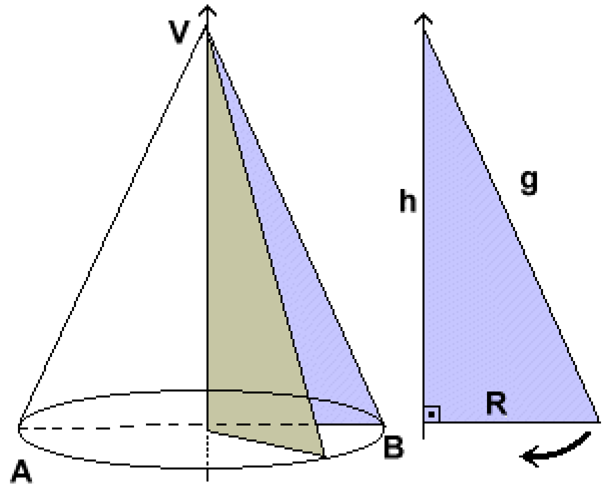
Classificação do cone

Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto** quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.



Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.

Observações sobre um cone circular reto

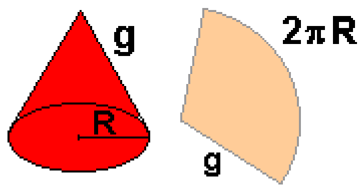


1. Um cone circular reto é chamado **cone de revolução** por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos
2. A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. No caso acima, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.
3. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\mathbf{g^2 = h^2 + R^2}$$

4. A **Área Lateral** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

$$\mathbf{A_{Lat} = Pi\ R\ g}$$

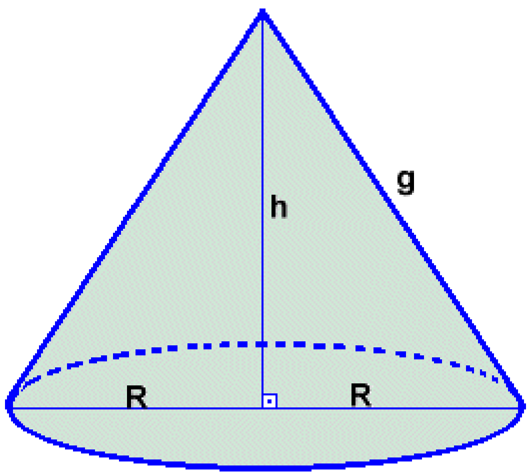


5. A **Área total** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

$$\mathbf{A_{Total} = Pi\ R\ g + Pi\ R^2}$$

Cones Equiláteros

Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.



A área da base do cone é dada por:

$$A_{Base} = Pi\ R^2$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(2R)^2 = h^2 + R^2$$
$$h^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

Assim:

$$h = R\sqrt{3}$$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$$V = (1/3)\ Pi\ \sqrt{3}\, R^3$$

Como a área lateral pode ser obtida por:

$$A_{Lat} = Pi\ R\ g = Pi\ R\ 2R = 2\ Pi\ R^2$$

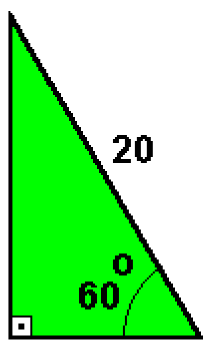
então a área total será dada por:

$$A_{Total} = 3\ Pi\ R^2$$

Exercícios resolvidos

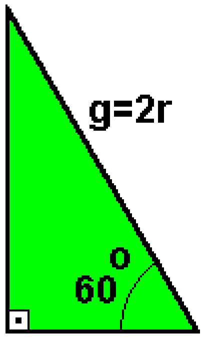
1. A geratriz de um cone circular reto mede 20 cm e forma um ângulo de 60 graus com o plano da base. Determinar a área lateral, área total e o volume do cone.

   $\text{sen}(60^o) = h/20$
   $(1/2)\sqrt{3} = h/20$
   h = 10 R[3] cm
   $V = (1/3)\ A_{base}\ h$



$V = (1/3)\ Pi\ r^2\ h$

$(1/3)\ Pi\ 10^2\ 10\ \sqrt{3} = (1/3)\ 1000\ \sqrt{3}\ Pi\ cm^3$



r = 10 cm; g = 20 cm

$A_{lat} = Pi\ r\ g = Pi\ 10\ 20 = 200\ Pi\ cm^2$

$A_{total} = A_{lat} + A_{base}$

$A_{total} = Pi\ r\ g + Pi\ r^2 = Pi\ r\ (r+g)$

$A_{total} = Pi\ 10\ (10+20) = 300\ Pi\ cm^2$

2. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2cm e um dos ângulos mede 60 graus. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtem-se um cone. Qual é o seu volume?

$sen(60^o) = R/2$

$(1/2)\sqrt{3} = R/2$

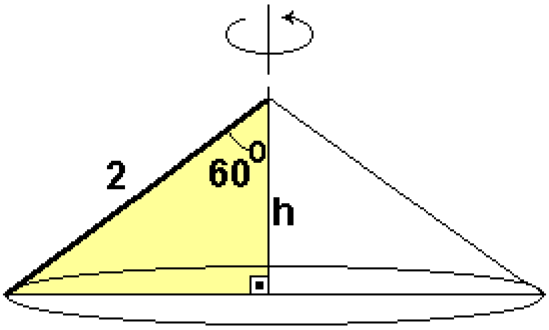
$R = \sqrt{3}\ cm$

$g^2 = h^2 + R^2$

$2^2 = h^2 + 3$

$4 = h^2 + 3$

$h = 1\ cm$

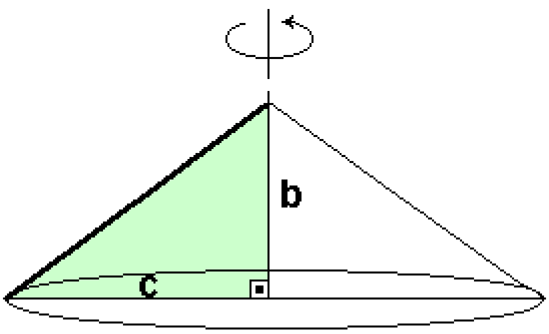


$V = (1/3)\ A_{base}\ h = (1/3)\ Pi\ R^2\ h = (1/3)\ Pi\ 3 = Pi\ cm^3$

3. Os catetos de um triângulo retângulo medem *b* e *c* e a sua area mede 2 m^2. O cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto b tem volume 16 Pi m^3. Determine o comprimento do cateto *c*.

Como a área do triangulo mede 2 m^2, segue que

$(1/2)\ b\ c = 2$



implicando que

$$b.c=4$$

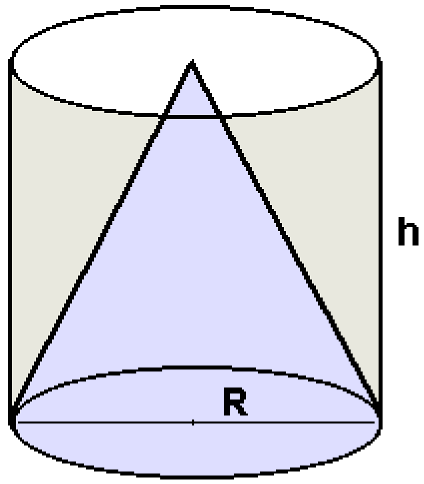
$V = (1/3)\, A_{base}\, h$
$16\, Pi = (1/3)\, Pi\, R^2\, b$
$16\, Pi = (1/3)\, Pi\, c\, c\, b$
$16 = c(4/3)$
$c = 12$ m

4. As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

$h_{prisma} = 12$
$A_{base\ do\ prisma} = A_{base\ do\ cone} = A$
$V_{prisma} = 2\, V_{cone}$
$A\, h_{prisma} = 2(A\, h)/3$
$12 = 2.h/3$
$h=18$ cm

5.

Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio R e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?



$V = V_{cilindro} - V_{cone}$
$V = A_{base}\, h - (1/3)\, A_{base}\, h$
$V = Pi\, R^2\, h - (1/3)\, Pi\, R^2\, h$
$V = (2/3)\, Pi\, R^2\, h\ cm^3$

O conceito de esfera

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações a problemas da vida. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico (disco esférico) envolvido pela mesma, razão pela qual muitas pessoas calculam o *volume* da esfera. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido, herança da Geometria Euclidiana.

Embora não seja correto, muitas vezes necessitamos falar palavras que sejam entendidas pela coletividade. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n-dimensional. Um caso interessante é a esfera na reta unidimensional::

$$\mathbf{S^o = \{ x \text{ em } R : x^2 = 1 \} = \{ +1, -1\}}$$

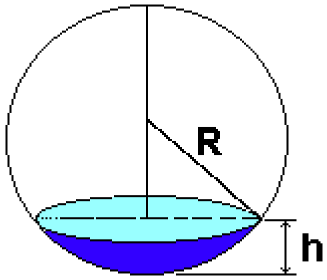
Por exemplo, a esfera

$$\mathbf{S^1 = \{ (x,y) \text{ em } R^2 : x^2+y^2=1 \}}$$

é conhecida por nós como uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano.

Aplicação: volumes de líquidos

Um problema fundamental para empresas que armazenam líquidos em tanques esféricos, cilíndricos ou esféricos e cilíndricos é a necessidade de realizar cálculos de volumes de regiões esféricas a partir do conhecimento da altura do líquido colocado na mesma.



Por exemplo, quando um tanque é esférico, ele possui um orifício na parte superior (polo Norte) por onde é introduzida verticalmente uma vara com indicadores de medidas. Ao retirar a vara, observa-se o nível de líquido que fica impregnado na vara e esta medida corresponde à altura de líquido contido na região esférica. Este não é um problema trivial, como observaremos pelos cálculos realizados na sequência.

A seguir apresentaremos elementos esféricos básicos e algumas fórmulas para cálculos de áreas na esfera e volumes em um sólido esférico.

A esfera

A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância, denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

Uma notação para a esfera com raio unitário centrada na origem de R^3 é:

$$S^2 = \{ (x,y,z) \text{ em } R^3 : x^2+y^2+z^2=1 \}$$

Uma esfera de raio unitário centrada na origem de R^4 é dada por:

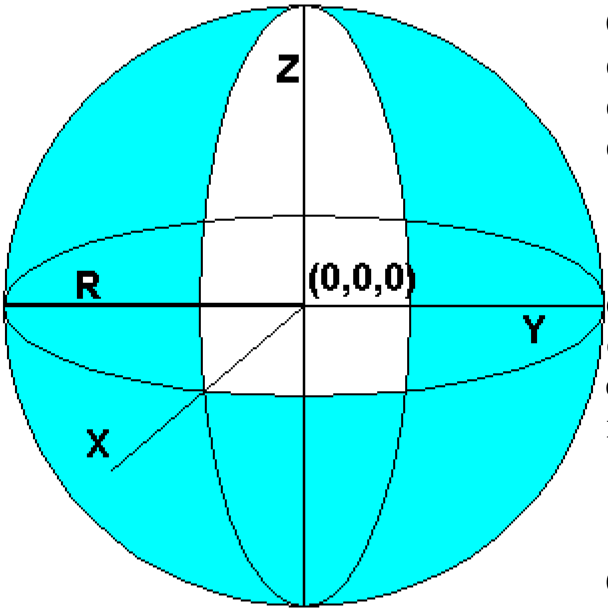
$$S^3 = \{ (x,y,z,w) \text{ em } R^4 : x^2+y^2+w^2+z^2=1 \}$$

Você conseguiria imaginar espacialmente tal esfera?

Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico. Em uma melancia esférica a esfera poderia ser considerada a película verde (casca) que envolve a fruta.

É comum encontrarmos na literatura básica a definição de esfera como sendo o sólido esférico, no entanto não se deve confundir estes conceitos. Se houver interesse em aprofundar os estudos desses detalhes, deve-se tomar algum bom livro de Geometria Diferencial que é a área da Matemática que trata do detalhamento de tais situações.

O disco esférico é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados na casca e dentro da esfera. Do ponto de vista prático, o disco esférico pode ser pensado como a reunião da película fina que envolve o sólido esférico com a região sólida dentro da esfera. Em uma melancia esférica, o disco esférico pode ser considerado como toda a fruta.



Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (0,0,0), a equação da esfera é dada por:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contem a casca reunido com o interior, isto é:

$$x^2+y^2+z^2\leq R^2$$

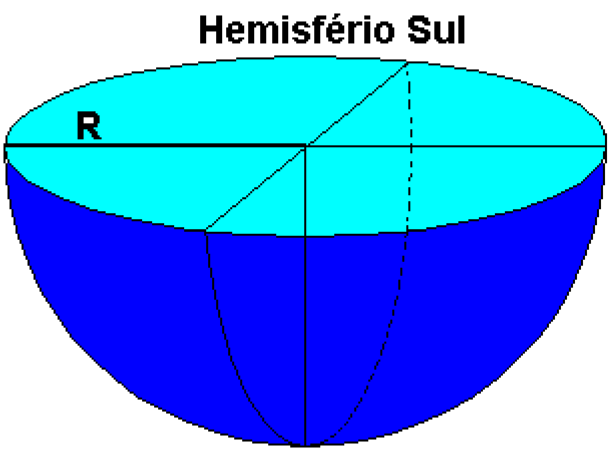
Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (x_o,y_o,z_o), a equação da esfera é dada por:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2$$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contem a casca reunido com o interior, isto é, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em R^3 tal que:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\leq R^2$$

Da forma como está definida, a esfera centrada na origem pode ser construída no espaço euclidiano R^3 de modo que o centro da mesma venha a coincidir com a origem do sistema cartesiano R^3, logo podemos fazer passar os eixos OX, OY e OZ, pelo ponto (0,0,0).



Seccionando a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ com o plano **z=0**, obteremos duas superfícies semelhantes: o hemisfério Norte ("boca para baixo") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z é não negativa e o hemisfério Sul ("boca para cima") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z não é positiva.

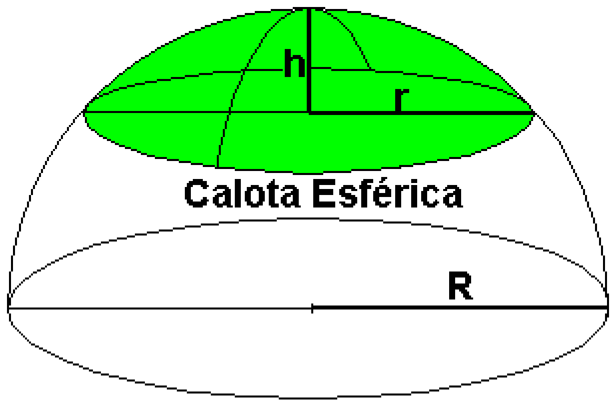
Se seccionarmos a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ por um plano vertical que passa em (0,0,0), por exemplo, o plano **x=0**, teremos uma circunferência maximal C da esfera que é uma circunferência contida na esfera cuja medida do raio coincide com a medida do raio da esfera, construída no plano YZ e a equação desta circunferência será:

$$x=0,\ y^2+z^2=R^2$$

sendo que esta circunferência intersecta o eixo OZ nos pontos de coordenadas (0,0,R) e (0,0,-R). Existem infinitas circunferências maximais em uma esfera.

Se rodarmos esta circunferência maximal C em torno do eixo OZ, obteremos a esfera através da rotação e por este motivo, a **esfera é uma superfície de revolução**.

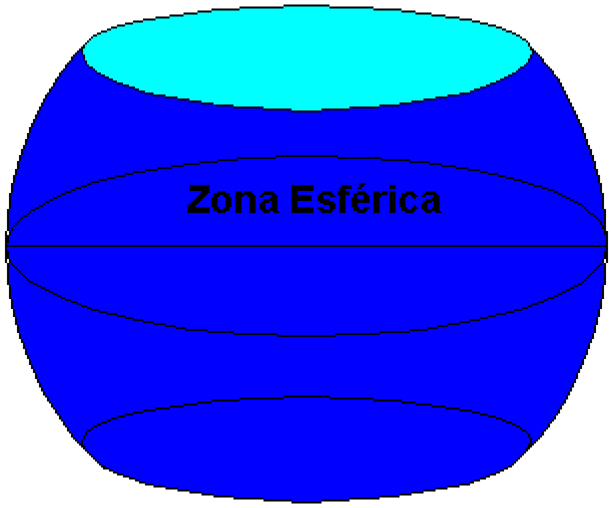
Se tomarmos um arco contido na circunferência maximal cujas extremidades são os pontos (0,0,R) e (0,p,q) tal que $p^2+q^2=R^2$ e rodarmos este arco em torno do eixo OZ, obteremos uma superfície denominada calota esférica.



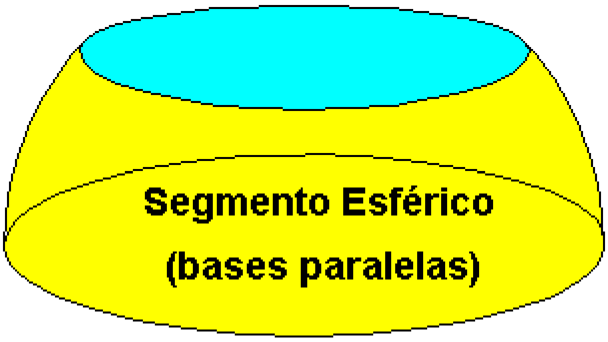
Na prática, muitas vezes as pessoas usam o termo calota esférica para representar tanto a superfície como o sólido geométrico envolvido pela calota esférica. Neste trabalho, para evitar confusões, usarei "calota esférica" com aspas para o sólido e sem aspas para a superfície.

Se, a partir da rotação, construirmos duas calotas em uma esfera, de modo que as extremidades dos arcos sejam (0,0,R) e (0,p,q) com $p^2+q^2=R^2$ no primeiro caso (calota Norte) e (0,0,-R) e (0,r,-s) com $r^2+s^2=R^2$ no segundo caso (calota Sul) e retirarmos estas duas calotas da esfera, teremos uma superfície de revolução denominada zona esférica.

De um ponto de vista prático, consideremos uma melancia esférica. Com uma faca, cortamos uma "calota esférica" superior e uma "calota esférica" inferior. O que sobra da melancia é uma região sólida envolvida pela zona esférica, algumas vezes também denominada zona esférica.



Consideremos uma "calota esférica" com altura h_1 e raio da base r_1 e retiremos desta calota uma outra "calota esférica" com altura h_2 e raio da base r_2, de tal modo que os planos das bases de ambas sejam paralelos. A região sólida determinada pela calota maior menos a calota menor recebe o nome de segmento esférico com bases paralelas.



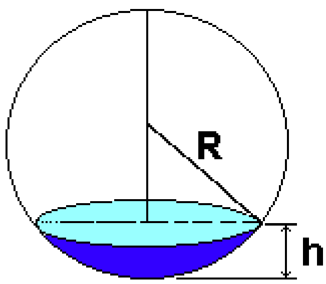
No que segue, usaremos esfera tanto para o sólido como para a superfície, "calota esférica" para o sólido envolvido pela calota esférica, a letra maiúscula R para entender o raio da esfera sobre a qual estamos realizando os cálculos, V será o volume, A_{Lat} será a área lateral e e A_{Tot} será a área total.

Fórmulas para objetos esféricos

- **Esfera**
  $V = (4/3) \times Pi\ R^3$
  $A_{Tot} = 4 \times Pi \times R^2$
- **Calota esférica (altura h, raio da base r)**
  $R^2 = h(2R-h)$
  $A_{Lat} = 2 \times Pi \times R \times h$
  $A_{Tot} = Pi \times h \times (4R - h)$
  $V = (1/3) \times Pi \times h^2\ (3R-h) = (1/6) \times Pi\ (3R^2 + h^2)$
- **Segmento esférico (altura h, raios das bases $r_1 > r_2$)**
  $R^2 = a^2 + (\ (r_1^2 - r_2^2 - h^2)/2h))^2$
  $A_{Lat} = 2 \times Pi \times R \times h$
  $A_{Tot} = Pi \times (2Rh + r_1^2 + r_2^2)$
  $V = (1/6) \times Pi \times h\ (3\ r_1^2 + 3\ r_2^2 + h^2)$

Estas fórmulas podem ser obtidas como aplicações do Cálculo Diferencial e integral, mas nós nos limitaremos a apresentar um processo matemático para a obtenção da fórmula do cálculo do volume da "calota esférica" em função da altura da mesma.

Volume de uma calota no hemisfério Sul



Se tomarmos a esfera centrada no ponto (0,0,R) com raio R, a sua equação será dada por

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$$

A altura será indicada pela letra **h** e o plano que coincide com o nível do líquido (cota) será indicado por z=h. A interseção entre a esfera e este plano é dado pela circunferência

$$x^2+y^2=R^2-(h-R)^2$$

Obteremos o volume da calota esférica com a altura h é menor ou igual ao raio R da esfera, isto é, h pertence ao intervalo [0,R] e neste caso poderemos explicitar o valor de z em função de x e y para obter:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Para simplificar as operações algébricas, usaremos a letra r para indicar:

$$R^2=R^2-(h-R)^2=h(2R-h)$$

A região de integração será a região circular S descrita por $x^2+y^2 \leq R^2$ ou em coordenadas polares através de:

$$0 \leq m \leq R;\ 0 \leq t \leq 2\ Pi$$

A integral dupla que representa o volume da calota em função da altura h é dada por:

$$V_C(h) = \iint_S [h - z]\ dx\ dy$$

ou seja

$$V_C(h) = \iint_S [h - R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}]\ dx\ dy$$

Esta integral escrita em Coordenadas Polares fica na forma:

$$V_C(h) = \int_{t=0}^{2\pi} \int_{m=0}^{R} [h - R + \sqrt{R^2 - m^2}]\ m\ dm\ dt$$

Após realizar a integral na variável t, podemos separá-la em duas integrais:

$$V_C(h) = 2\pi . [\int_{m=0}^{R} (h - R)\ m\ dm\ + \int_{m=0}^{R} \sqrt{R^2 - m^2}\ m\ dm\ ]$$

ou seja:

$$V_C(h) = \pi . [(h - R)R^2\ - \int_{m=0}^{R} \sqrt{R^2 - m^2}(-2m)\ dm\ ]$$

Com a mudança de variável $u=R^2-m^2$ e $du=(-2m)\ dm$ poderemos reescrever:

$$V_C(h) = \pi\,[(h-R)R^2 - \int_{u=R^2}^{0} \sqrt{u}\,du]$$

Após alguns cálculos obtemos:

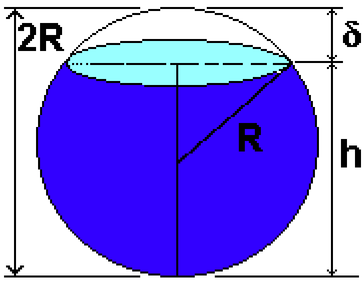
$$V_C(h) = Pi\times(h-R)\,[R^2 - (h-R)^2] - (2/3)\times Pi\times(\{(R-h)\}^3 - R^3)$$

e assim temos a fórmula para o cálculo do volume da calota esférica no hemisfério Sul com a altura h no intervalo [0,R], dada por:

$$V_C(h) = (1/3)\times Pi\times h^2\,(3R-h)$$

Volume de uma calota no hemisfério Norte

Se o nível do líquido mostra que a altura **h** já ultrapassou o raio **R** da região esférica, então a altura h está no intervalo [R,2R] e lançaremos mão de uma propriedades de simetria da esfera que nos diz que o volume da calota superior assim como da calota inferior somente depende do raio R da esfera e da altura h e não da posição relativa ocupada.



Aproveitaremos então o resultado do cálculo utilizado para a calota do hemisfério Sul. Tomaremos a altura tal que: **h=2R-d** onde d é a altura da região que não contem o líquido. Como o volume desta calota *vazia* é dado por:

$$V_C(d) = (1/3)\times Pi\times d^2(3R-d)$$

e como **h=2R-d**, então para h no intervalo [R,2R], poderemos escrever o volume da calota vazia em função de h:

$$V_C(h) = (1/3)\times Pi\times(2R-h)^2\,(R+h)$$

Para obter o volume ocupado pelo líquido, basta tomar o volume da região esférica que é dado por **V=(4/3)×Pi×R³** e retirar o volume da calota *vazia*.

Isto proporciona o volume da região ocupada em função da altura h:

$$V(h) = (4/3)\times Pi\times R^3 - (1/3)\times Pi\times(2R-h)^2\,(R+h)$$

que pode ser simplificada para:

$$V(h) = (1/3)\times Pi\times h^2\,(3R-h)$$

Independentemente do fato que a altura h esteja no intervalo [0,R] ou [R,2R] ou de uma forma geral em [0,2R], o cálculo do volume ocupado pelo líquido é dado por:

$$V(h) = (1/3)\times Pi\times h^2\,(3R-h)$$
