1. VETORES

1.1 Definições.

O estudo de vetores será fundamentado no conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional ou Euclidiano, que será indicado por $\mathbf{R}^3$.

Os pontos de $\mathbf{R}^3$ serão denotados por letras latinas maiúsculas(A,B,C,...), as retas, por letras latinas minúsculas(a, b, c, ...), os planos, por letras gregas minúsculas (α, β, γ,...) e números reais, ou escalares por letras minúsculas latinas ou gregas.

1.1.1 Grandezas Escalares e Vetoriais.

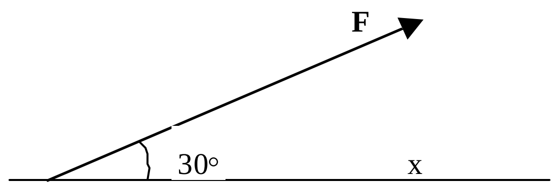
As grandezas físicas se subdividem em **escalares** e **vetoriais**. As grandezas escalares se caracterizam por sua **intensidade ou tamanho** (um número e sua unidade correspondente), como por exemplo: o tempo, a massa, a temperatura, comprimento, etc. As grandezas vetoriais se caracterizam por três componentes ou sejam **intensidade**, **direção** e **sentido**, como por exemplo: a força, o momento linear, o deslocamento, etc.

Exemplo 1.1: Grandezas Escalares:

- *50 kg de massa;*
- *30 minutos;*
- *15 m de comprimento*.

Grandezas vetoriais.

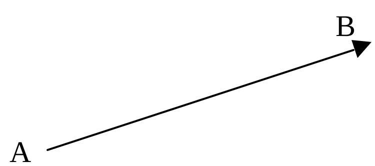
- *Uma força de 5 N fazendo um angulo de 30° com a reta* ***x*** *e tendo o sentido da esquerda para a direita. Veja a figura baixo.*



- *Uma velocidade de 10 m/s na direção da reta **s** e no sentido da direita para a esquerda. Veja a figura abaixo.*

1.1.2 Segmento Orientado.

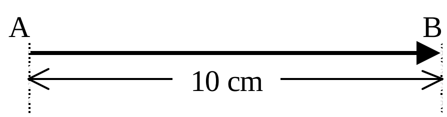
Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos **(A, B)** sendo o primeiro chamado de **origem** e o segundo de **extremidade**. Sua representação geométrica é feita por uma **seta** indo do ponto **A** para o ponto **B**, conforme na figura abaixo.



A **direção** de um segmento orientado é dada pela sua reta suporte, isto é, pela reta que contém os pontos que o define ou por qualquer reta paralela a ela.

O **sentido** de um segmento orientado é definido pela orientação do ponto origem para o ponto extremidade ou pela seta na sua representação geométrica.

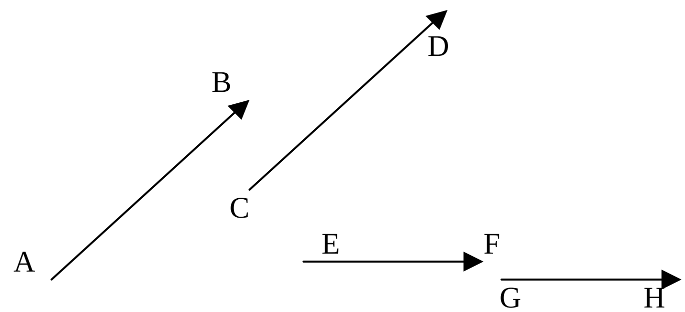
O **comprimento** de um segmento orientado é a medida do segmento geométrico que vai desde o ponto origem até o ponto extremidade. Exemplo:



Segmentos orientados **nulos** são aqueles cuja origem e cuja extremidade é o mesmo ponto. Exemplos: (A,A), (B,B), (P,P), etc.

Segmentos **opostos** são dois segmentos com mesma direção, mesmo comprimento e sentidos opostos. Por exemplo, se $A \neq B$, então os segmentos (A,B) e (B,A) são segmentos opostos.

Dois segmentos orientados, (A,B) e (C,D), são **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento ou quando ambos forem nulos. A notação para segmentos equipolentes é a seguinte: (A,B) ~ (C,D). Veja na figura abaixo representações de segmentos orientados equipolentes.



A relação de equipolência de segmentos orientados tem as seguintes propriedades:

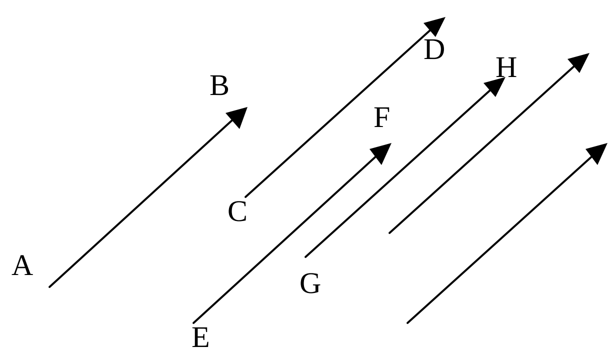
a) **Reflexiva:** (A,B) ~ (A,B);

b) **Simétrica:** Se (A,B) ~ (C,D) então (C,D) ~ (A,B);

c) **Transitiva:** Se (A,B) ~ (C,D) e se (C,D) ~ (E,F) então (A,B) ~ (E,F).

Portanto, a relação de equipolência é uma relação de equivalência.

Denomina-se **classe de equipolência** do segmento orientado (A,B) ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a (A,B).



1.1.3 Vetor

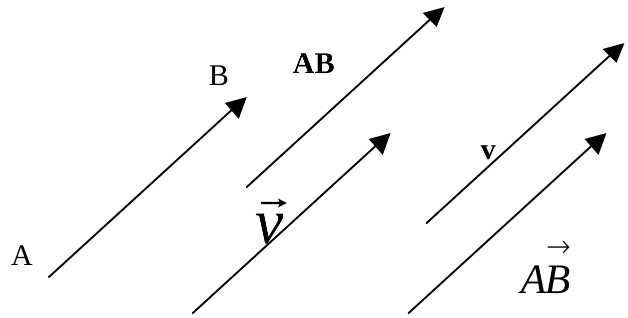
Definição : Vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados do Espaço Euclidiano (**R**^{3}). O conjunto de todos os vetores é indicado por **V**^{3}.

Notação:

a) Se (A,B) é um segmento orientado, o **vetor correspondente** é denotado por $\overrightarrow{AB}$ ou por **AB**

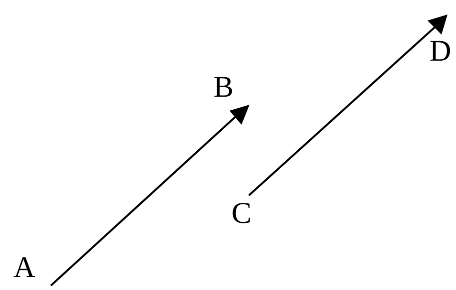
b) Usam-se também letras latinas minúsculas para indicar vetores. Por exemplo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \cdots$ ou, respectivamente: **u**, **v**, **x** . Neste caso não se faz referência a seu representante.

Exemplo 1.2:



<u>Vetor nulo</u> é aquele cujo representante é um segmento orientado nulo e é representado por $\vec{0}$ = **0** = $\overrightarrow{AA}$ = **AA** = **BB**

<u>Vetores iguais</u> - Dois vetores **AB** e **CD** são iguais se, e somente se (A,B) ~ (C,D) ou seja:



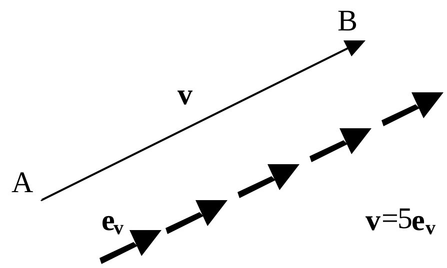
<u>Vetores opostos</u> - Dado um vetor **v** = **AB**, o vetor **BA** é o oposto de **AB** e se indica por -**AB** ou por -**v**.

<u>Norma</u> (intensidade ou módulo) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Por exemplo, se $\vec{u}$ for um vetor qualquer, a norma de $\vec{u}$ indica-se por $\|\vec{u}\|$.

<u>Vetor unitário</u> - é o vetor cuja norma é igual à unidade, ou seja, se $\vec{u}$ é unitário então $\|\vec{u}\| = 1$.

Versor - de um vetor $\vec{v}$ não nulo é o vetor unitário com mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$ ou seja

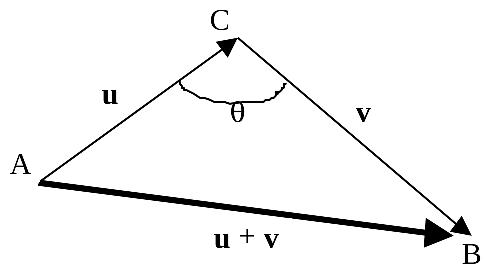
$$\vec{e}_{\vec{v}} = \hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = |\mathbf{v}|\, \mathbf{e_v}$$



1.2 Adição de vetores

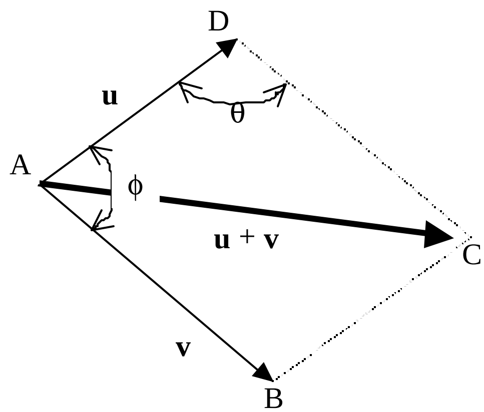
Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbf{V^3}$, a operação de adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ faz corresponder um vetor chamado *soma*, indicado por $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$

Regra do Triângulo para a Adição de Vetores. - Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados por seus representantes (A, C) e (C, B), respectivamente, então a soma $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$ é dada pelo representante (A,B), como pode ser visto na figura abaixo.



$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Regra do Paralelogramo para a Adição de Vetores. - Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados por seus representantes (A,D) e (A,B), respectivamente, então a soma $\vec{u}$ **+** $\vec{v}$ é dada pelo representante (A,C), como pode ser visto na figura abaixo.



$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\phi$$

Obs: Lembrar que $\theta + \phi = \pi = 180°$

Propriedades da adição de vetores

Sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e $\vec{0}$ o vetor nulo, então as seguintes propriedades são válidas para a adição de vetores:

A.1) Propriedade Associativa.

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

A.2) Propriedade Comutativa.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

A.3) Elemento Neutro.

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

A.4) Elemento Oposto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

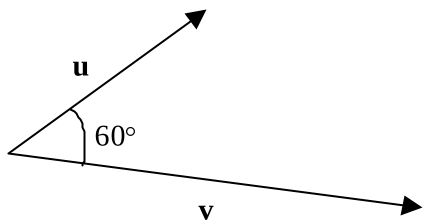
Subtração de vetores

A subtração do vetor $\vec{v}$ do vetor $\vec{u}$ é, por definição, a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto de $\vec{v}$, ou seja

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3$$

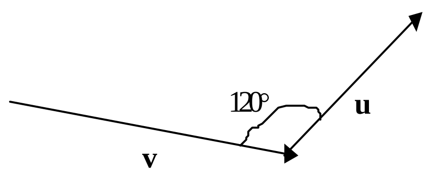
Exercícios: Represente graficamente as adições dos pares de vetores abaixo, e dê o valor da norma dos vetores resultantes, usando as regras de adição vistas acima. Os vetores têm normas dadas por: |**a**| = 10 e |**b**| = 20.

a)



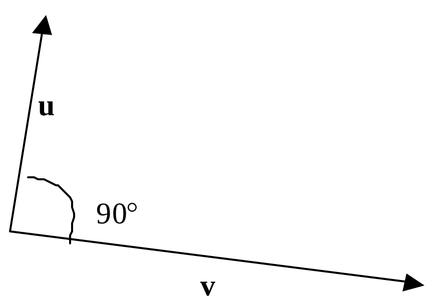
=================

b)

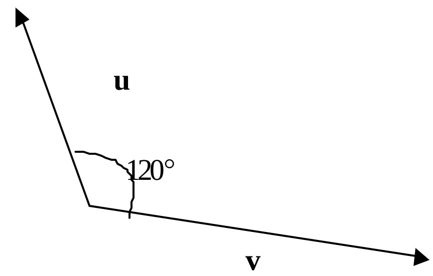


=================

c)

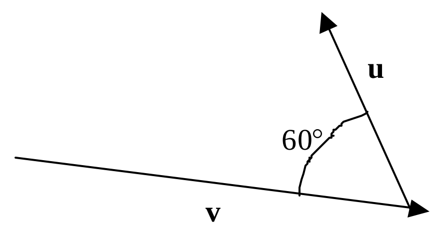


d)



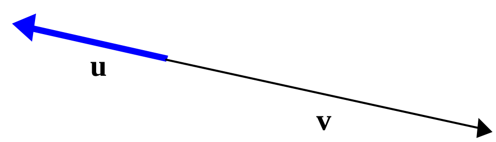
=================

e)



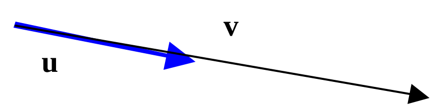
=================

f)



=================

g)



=================

1.3 Multiplicação de escalar (número real) por vetor

Seja $\vec{v}$ um vetor qualquer de **V³** e seja **a** um número real qualquer. A multiplicação do escalar **a** pelo vetor $\vec{v}$ é a operação "externa" em **V³** que a cada escalar **a** e a cada vetor $\vec{v}$ associa um vetor **a** $\vec{v}$ tal que:

1) Se **a =0** ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $a\,\vec{v} = \vec{0}$ (por definição).

2) Se $a \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $a\,\vec{v}$ é caracterizado por:

a) $a\,\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$ **.**

b) $a\,\vec{v}$ e $\vec{v}$ tem mesmo sentido se $a > 0$ e sentidos contrários de $a < 0$.

c) $\|a\,\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$, isto é, a norma de $a\,\vec{v}$ é igual ao produto do módulo de **a** pela norma de $\vec{v}$.

<u>**Propriedades da multiplicação de escalar por vetores**</u>

Sejam os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ quaisquer e os escalares $a\ \ e\ b$ quaisquer, então as seguintes propriedades são válidas para a multiplicação de escalar por vetor:

M.1) $a\ (\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$;

M.2) $(a\ + b\ )\vec{v} = a\,\vec{v} + b\,\vec{v}$;

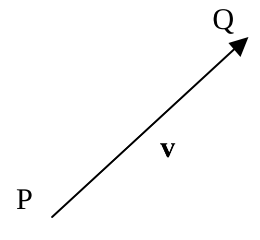
M.3) Elemento Neutro

$1\vec{v} = \vec{v}$;

M.4) $a\ (b\,\vec{v}) = (a\,b)\vec{v} = b\,(a\,\vec{v})$.

1.4 Soma de ponto com vetor

Definição :Sejam $P \in R^3$, um ponto qualquer do Espaço Euclidiano e $\vec{v} \in V^3$, um vetor qualquer do Espaço Vetorial Tridimensional. Chama-se operação de soma de um ponto *P* com um vetor $\vec{v}$ a operação que associa um único ponto Q de R^3 a $P + \vec{v}$ ou seja



OBS.: $P-\vec{v}$ é a soma de *P* com o inverso de $\vec{v}$. Também, como conseqüência dessa operação, um vetor pode ser definido como diferença de dois pontos ou seja $\vec{v}=Q-P$.

Propriedades dessa Operação

P1. $P+\vec{0}=P \quad , \quad \forall P \in R^3$

P2. Se $P+\vec{u}=P+\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\vec{v}$

P3 $(P+\vec{u})+\vec{v}=P+(\vec{u}+\vec{v})$

P4 Se $A+\vec{v}=B+\vec{v} \quad \Rightarrow \quad A=B$

P5 $(P-\vec{v})+\vec{v}=P$

Exercícios propostos

1.4.1.Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer. Represente graficamente $\vec{u}+\vec{v}$

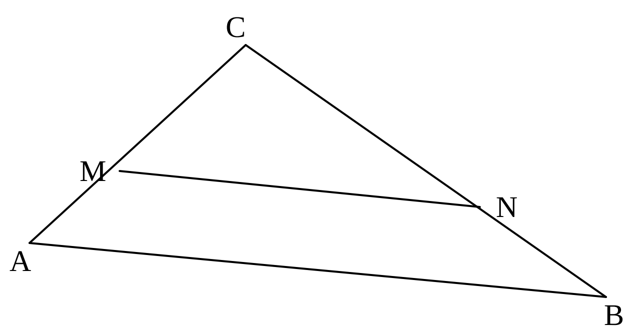
a) Usando a regra do triângulo.
b) Usando a regra do paralelogramo.

1.4.2.Demonstre graficamente a propriedade comutativa da adição de vetores ou seja mostre que
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

1.4.3. Seja o vetor $\vec{u}$ qualquer. Represente graficamente $\vec{v}=2\vec{u}$.

1.4.4. Sejam os vetores **u** e **v** quaisquer. Represente graficamente a adição $2\vec{u}-3\vec{v}$. Explique a operação.

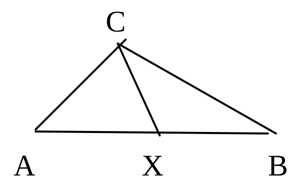
1.4.5. Demonstre que o segmento que une os pontos M e N que dividem os lados AC e CB em segmentos de tamanhos 1/3 e 2/3, é igual a 2/3 da medida da base, isto é, prove que
$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



=======================

1.4.6. Seja o triangulo ABC , e seja X o ponto médio de AB . Demonstre a relação:

$\overrightarrow{XC} = f(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$



Solução:

XC = **XA** + **AC**

XC = **XB** + **BC**

2 **XC** = **0** + **AC** + **BC** $\Rightarrow$ **XC** = ½**AC** + ½**BC**, Q.E.D.

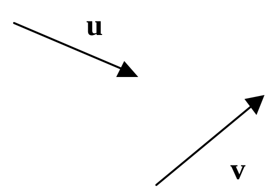
========================

1.4.7.Seja o vetor $\vec{u}$ de norma igual a 3 cm e o vetor $\vec{v}$ de norma igual a 4 cm, sabendo que o ângulo entre eles é de 90º, represente graficamente $\vec{u}+\vec{v}$

a) Usando a regra do triângulo.

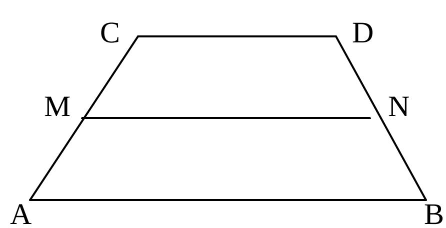
b) Usando a regra do paralelogramo.

1.4.8. Dados os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ abaixo obtenha a soma $3\vec{u}+2\vec{v}$.



======================

1.4.9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é igual a semi-soma das medidas das bases, isto é, prove que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.



Solução:

AB = **AD** + **DC** + **CD**

MN = **MD** + **DC** + **CN** = ½**AD** + **DC** + ½**CB** = ½**AD** + ½**DC** + ½**CD** + ½**DC**

$MN=\frac{1}{2}(AB+DC)$, q.e.d.

===========================

1.4.10. Livro do Boulos, pg. 15: 6; 7

1.5 Dependência e Independência Linear.

Combinação linear: Se um vetor **x** pode ser escrito da forma **x** = α **v₁** + **v₂** + ... + γ **vₙ**, então dizemos que **x** é uma combinação linear de α **v₁** , **v₂** , **...** e **vₙ**,

Definição informal de independência linear: Um grupo de vetores é dito linearmente independente se não for possível escrever qualquer deles como combinação linear dos outros.

A dependência e a independência linear de vetores são conceitos fundamentais no estudo de espaços vetoriais. Por isso, sua conceituação será feita sob dois enfoques: o geométrico e o algébrico. Porém, para isso necessita-se do conceito de paralelismo entre vetor e reta e entre vetor e plano.

Diz-se que um vetor $\vec{v}$ é paralelo a uma reta *r* se algum representante de $\vec{v}$ tiver a reta *r* como reta suporte. Dois vetores são paralelos quando suas retas suportes forem paralelas.

Diz-se que um vetor $\vec{v}$ é paralelo a um plano p se algum representante de $\vec{v}$ tiver como reta suporte uma das retas do plano p.

1.5.1 Conceituação geométrica da dependência linear de vetores.

A definição geométrica da dependência linear de vetores é feita por etapas, dependendo da quantidades de vetores envolvidos.

Definição 1:

a) Um único vetor $\vec{v} \in V^3$ é *linearmente dependente*(**LD**) se $\vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\vec{v}$ é *linearmente independente*(**LI**);

b) Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ são *linearmente dependentes* se, e somente se, forem colineares ou paralelos. Caso contrário, são *linearmente independentes*;

c) Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são **linearmente dependentes** se, e somente se, forem paralelos a um mesmo plano **p.** Caso contrário, são *linearmente independentes; e*

d) Quatro ou mais vetores de V^3 são sempre *linearmente dependentes.*

1.5.2 Caracterização algébrica da dependência linear de vetores.

Definição 2: Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, v_n \quad (n \geq 1)$ vetores de V^3 e sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais. Chama-se **COMBINAÇÃO LINEAR** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, v_n$ ao vetor $\vec{u}$ definido por:

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

OBS.: Diz-se também que $\vec{u}$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, v_n$.

Definição 3: Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_n \in V^3$**.** Dizemos que o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, v_n\}$ é *linearmente independente* (LI) , ou que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_n$ são LI, se a equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

implicar em que a única solução seja $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ diz-se que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, v_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_n$ são LD.

Teorema 1: $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ é LD se , e somente se um destes vetores for combinação linear dos outros, isto é, se existe pelo menos um valor $a_i \neq 0$ tal que

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots a_i\vec{v}_i + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

ou

$$\vec{v}_i = \frac{1}{a_i}(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\vec{v}_{i-1} + a_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \cdots + a_n\vec{v}_n)$$

Corolário 1.1 Os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ são linearmente dependentes se, e somente se, existir um número real **a** tal que $\vec{u} = a\ \vec{v}$ ou se existir um número real **b** tal que $\vec{v} = b\vec{u}$.

Corolário 1.2 Se os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ são linearmente independentes e se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são linearmente dependentes, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}\ e\ \vec{v}$, isto é, existem escalares **a** e **b** tais que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Corolário 1.3 Se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são linearmente independentes, então todo vetor $\vec{x} \in V^3$ é gerado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$, isto é, para todo o vetor $\vec{x} \in V^3$, existem números reais $a\ , b\ \ eg$ tais que

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + g\,\vec{w}$$

1.6 Base.

1.6.1 Base do espaço vetorial V³

Definição: Chama-se base de **V³** a qualquer tripla ordenada, **E** = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, de vetores linearmente independentes de **V³** .

OBS.: A base "**E**" gera todos os vetores de **V³** , isto é, qualquer vetor de **V³** é uma combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2\ e\ \vec{e}_3$ .Ou seja, existem escalares a_1, a_2, a_3 tais que $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{v}_3$ para qualquer vetor $\vec{v}$.

Coordenadas do Vetor: Escolhida uma base "**E**" de **V³**, fica associada a univocamente a cada vetor $\vec{v}$ um terno ordenado de escalares (a_1, a_2, a_3) . Esse terno é denominada **"coordenadas do vetor $\vec{v}$ "** em relação a base "**E**".

Notação: A ordem dos escalares é importante, pois trata-se de um terno ordenado.

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\ .$$

Adição de vetores em função das coordenadas

Sejam os vetores

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$$
$$\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$$

então define-se adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\vec{e}_3$$

ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1, a_2, a_3)_E + (b_1, b_2, b_3)_E = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E$$

Exemplo: Calcule a soma dos vetores: $\vec{u} = (5,2,3) \quad e \quad \vec{v} = (-2,1,4)$.

Solução:

$$\vec{u} + \vec{v} = (5 + (-2),\ 2 + 1,\ 3 + 4) = (3,\ 3,\ 7)$$

Multiplicação de escalar por vetor em função das coordenadas

Seja um vetor qualquer $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$ e seja um escalar qualquer l. Então, define-se produto do **escalar** l pelo **vetor** $\vec{u}$ por

$$l\ \vec{u} = l\ (\,a_1\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3) = l\ a_1\vec{e}_1 + l\ a_2\,\vec{e}_2 + l\ a_3\,\vec{e}_3$$

ou seja,

$$l\ \vec{u} = l\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (l\,a_1,\ l\,a_2,\ l\,a_3)$$

Exemplo: Sejam o vetor $\vec{u} = (5, -1, 2)$ e o escalar l**=2** . Calcule o produto do escalar l pelo vetor $\vec{u}$.

Solução:

$$l\ \vec{u} = 2\,(5, -1,\ 2) = (2 \times 5,\ 2 \times (-1),\ 2 \times 2) = (10, -2, 4)$$

Dependência linear de vetores em função das coordenadas

Teorema 4: Os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$ são **linearmente dependentes** se, e somente se, a_1, a_2, a_3 são proporcionais a b_1, b_2, b_3, isto é, se:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \text{ (constante)}$$

Teorema 5: Os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)_E$ são **linearmente independentes** se, e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemplos: Boulos pg 43: Resolvidos 1; 2; 3

Boulos pg. 45: Propostos 1; 2; 4; 6; 7
Esta apostila: 1.6.2; 1.6.3

Ortogonalidade de vetor com reta e plano

Diferenciação entre retas perpendiculares e ortogonais

Definição:

1) O vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é ortogonal àreta **r** (ao plano $\mathbf{p}$) se existir um representante (A,B) de $\vec{u}$ tal que $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal a **r** (a $\mathbf{p}$). O vetor nulo é considerado ortogonal a toda reta **r** e a todo plano $\mathbf{p}$.
2) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se um deles é nulo ou, caso contrário, admitirem representantes perpendiculares.(símbolo de ortogonalidade $\perp$).

Teorema 6: Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Base ortonormal

Definição: Uma base **E** = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é ortonormal (ou canônica) se $\vec{e}_1, \vec{e}_2\ e\ \vec{e}_3$ são unitários e ortogonais dois a dois.

Teorema 6: Se **E** = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal, e se $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z)_E$, então a norma de $\vec{u}$ é dada por

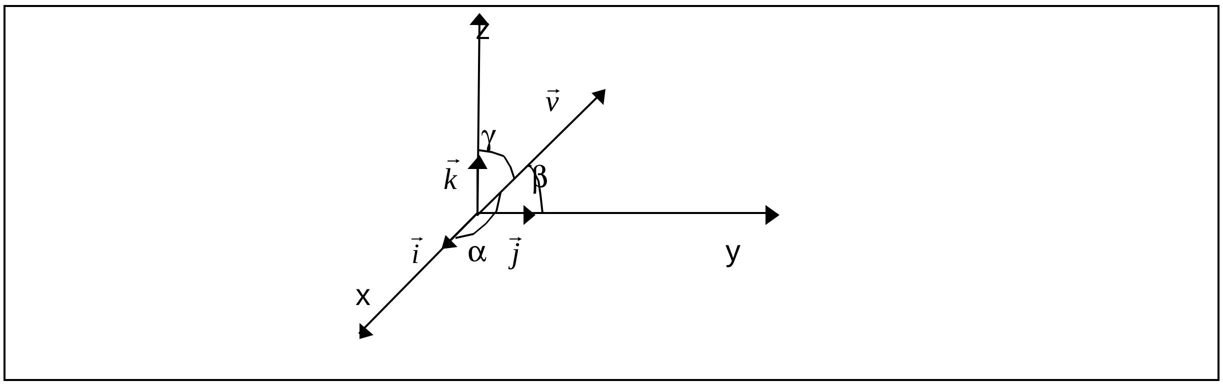
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exercícios: Boulos pg 45: Resolvido 5; Propostos 1; 2; 4; 6; 7; 11; 12
Esta apostila: 1.6.4; 1.6.6; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17

1.6.2 Cossenos Diretores

1.6.2.1 Ângulos diretores e cossenos diretores de um vetor.

Seja uma base ortonormal ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) e seja o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Chamam-se cossenos *diretores* de $\vec{v}$, relativamente a base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$), aos números reais $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$ onde, a , b eg são as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma com $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ respectivamente.



Os cossenos diretores do vetor $\vec{v}$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos g = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1.6.3 Paralelismo Entre Dois Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos (ou colineares) se forem LD, isto é, se existir um número real **k** tal que $\vec{u} = k\vec{v}$. Ou ainda, se

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Exercícios propostos.

1.6.1. Represente graficamente as seguintes seqüências de vetores linearmente Dependentes:

a) $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.

b) $\vec{u},\ \vec{v}\ e\ \vec{w}$.

1.6.2. Decida se os vetores são LI ou LD nos casos abaixo:

a) $\vec{u} = (-2,3,4), \quad \vec{v} = (4,-6,8)$

b) $\vec{u} = (1,2,1), \vec{v} = (1,-1,-7), \vec{w} = (4,5,-4)$

1.6.3. Sendo $\vec{u} = (1,-7,3)$, $\vec{v} = (2,1,3)$, $\vec{w} = (-5,-1,4)$, ache as coordenadas de

a) $\vec{w}+\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}$

1.6.4. Calcule $\|\vec{u}\|$., sendo E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal, nos casos:

a) $\vec{u} = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$

b) $\vec{u} = (7,0,-5)$

1.6.5. Escreva $\vec{z} = (4,0,13)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$., Sendo $\vec{u} = (1,-1,3), \vec{v} = (2,1,3), \vec{w} = (-1,-1,4)$.

1.6.6. Achar os vetores unitários $\mathbf{e_u}$ e $\mathbf{e_v}$, respectivamente paralelos aos vetores de base ortonormal $\vec{u} = (1,-3,1)\ e\ \vec{v} = (-3,3,3)$.

1.6.7. Sejam os vetores $\vec{u} = (1,2,2),\ \vec{v} = (m-1,1,m-2)\ e\ \vec{w} = (m+1,m-1,2)$. Determine "m" para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, seja LD.

1.6.8. Verifique se são ortogonais os vetores nos seguintes casos:

$a)\ \vec{u} = (1,2,0)\quad e\quad \vec{v} = (2,-1,5)$

$b)\ \vec{x} = (4,1,3)\quad e\quad \vec{y} = (0,-3,1)$

1.6.9. Determine os valores de **m** para que o vetor $\vec{v} = (m, 2m, 5m)$ expresso em uma base ortonormal, seja um vetor unitário.

1.6.10. Sendo E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal, exprima os vetores abaixo como combinação linear dos vetores da base E.

$a)\ \vec{u} = (3,2,1)$ $\quad b)\ \vec{v} = (2,-1,3)$

$c)\ \vec{x} = (4,-1,-7)$ $\quad d)\ \vec{y} = (0,8,13)$

1.6.11. Verifique se as triplas de vetores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ formam uma base no espaço R^3.

a) $\begin{cases} \vec{a} = (3,2,-1) \\ \vec{b} = (1,-1,1) \\ \vec{c} = (4,3,0) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (1,1,0) \\ \vec{b} = (1,0,1) \\ \vec{c} = (0,1,1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} \vec{a} = (2,3,1) \\ \vec{b} = (-1,-1,1) \\ \vec{c} = (4,6,2) \end{cases}$

1.6.12. Determine os valores de **m** para que o vetor $\vec{v} = (m, 6, 0)$ tenha norma igual a **7**.

1.6.13. Determine um vetor paralelo ao vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ com norma igual a 5, sendo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal.

1.6.14. Ache os vetores paralelos aos vetores de base ortonormal $\vec{u} = (2,-3,5)\quad e\quad \vec{v} = (-3,4,0)$ com normas iguais a 13 e 20 , respectivamente.

1.6.15. Calcule o vetor soma $(\vec{s})$ nos seguintes casos:

a) $\vec{s} = (1,3,2) + 2(1,2,0) - 5(3,0,-2)$

b) $\vec{s} = (4,1,2) - 7(-1,2,1) + 3(0,5,7) + 2(9,-3,1)$

1.6.16. Determine os valores de **m** e **n** para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m+1,3,1)\ e\ \vec{v} = (4,2,2n-1)$.

1.6.17. As seqüências de vetores abaixo formam bases de $\mathbf{V^3}$? Explique.

a) $\vec{u} = (1,3,2),\ \vec{v} = (1,2,0)\ e\ \vec{w} = (3,0,0)$

b) $\vec{u} = (4,1,2),\ \vec{v} = (-1,2,1)\ \ e\ \ \vec{w} = (0,5,7)$

c) **u** = (1, 0, 0); **v** = (0, 1, 0) e **w** = (0, 0, 1)

d) **u** = (1, 0, 0); **v** = (0, 1, 1)

1.6.18. Escreva $\vec{z} = (-2, 2, 2)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u},\ \vec{v}\ e\ \vec{w}.$, Sendo $\vec{u} = (-2, -1, 1),\ \vec{v} = (3, 0, -1),\ \vec{w} = (1, 1, 0)$.

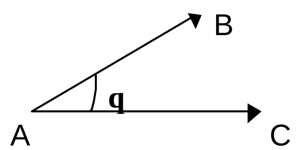
1.6.19. Calcule os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$.

2. PRODUTO DE VETORES

2.1 Produto escalar.

2.1.1 Ângulo entre dois vetores

Definição 2.1: Sejam os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sejam os pontos **A**, **B** e **C** tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (veja a figura abaixo). Seja $\mathbf{q}$ a medida em radianos (graus) do "**ângulo BÂC**" satisfazendo a restrição $0 \le q \le p \quad (0 \le q \le 180°)$.



Então, o número $\mathbf{q}$ é chamado medida em radianos (graus) do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.1.2 Definição de produto escalar

Definição 2.2: Chama-se produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao número real $\vec{u} \bullet \vec{v}$ dado por

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos q \quad ,$$

sendo $\mathbf{q}$ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Corolário 2.3: Se as coordenadas dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_3)$ se referem a uma base ortonormal, então o produto escalar, $\vec{u} \bullet \vec{v}$, pode ser dado por

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Demonstração:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos q$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \tfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 , \quad \textit{q.e.d.}$$

Corolário 2.4: Se $\|\vec{u}\| \ne \vec{0} \; e \; \|\vec{v}\| \ne \vec{0}$, então da Definição 2.2 vem:

$$\cos q = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \quad e \quad q = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \right)$$

Exemplo 2.1: Ache a medida em radianos do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Solução: Para obter-se o valor de q , precisa-se calcular primeiro o produto interno $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e as normas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (2,0,-3)\cdot(1,1,1) = 2.1 + 0.1 + (-3).1 = 2 + 0 - 3 = -1$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Substituindo na fórmula do q vem:

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{39}}\right) \quad .$$

θ = 99,21° = 1,73 rd

2.1.3 Propriedades do produto escalar

Teorema 2.1: Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e para qualquer número real **l** , tem-se:

1. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
2. $\vec{u}\,(l\,\vec{v}) = (l\,\vec{u}) \bullet \vec{v} = l\,(\vec{u} \bullet \vec{v})$
3. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
4. $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$; $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

<u>Norma de vetor como função do Produto Escalar</u>

Definição 2.5: Seja um vetor qualquer $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ com as coordenadas referindo-se a uma base ortonormal. Então, da definição de produto escalar, temos:

u.u = |**u**|^2 cos 0, e:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{(x,y,z) \bullet (x,y,z)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.1.4 Condição de ortogonalidade de dois vetores

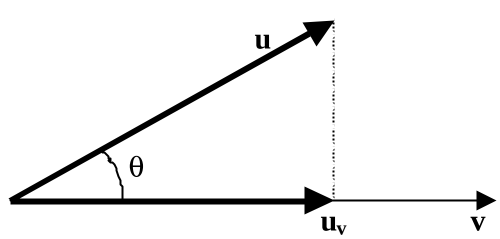
Teorema 2.2: Sejam dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^3. O vetor $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ $(\vec{u} \perp \vec{v})$ se, e somente se, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

2.1.5 Projeção do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, e **q** o ângulo entre eles. A projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$, representada por $proj_{\vec{v}}\ \vec{u}$, é o vetor definido por

$proj_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}\,|\cos q\ \hat{v}$, ou seja:

$$proj_{\vec{v}}\ \vec{u} = \vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$



Exercícios propostos.

2.1.1. Seja a base ortonormal ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Verifique se são ortogonais os vetores nos seguintes casos:

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \quad e \quad \vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

b) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad e \quad \vec{v} = -3\vec{j} + \vec{k}$

2.1.2. Ache a medida (em graus e em radianos) do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos abaixo.

a) $\vec{u} = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (-2, 10, 2)$

b) $\vec{u} = (3, 3, 0), \quad \vec{v} = (2, 1, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1, 4) \quad e \quad \vec{v} = (-1, 2, 2)$

2.1.3. Ache x de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos casos abaixo.

a) $\vec{u} = (x, 0, 3), \quad \vec{v} = (1, x, 3)$

b) $\vec{u} = (x, x, 4), \quad \vec{v} = (4, x, 1)$

c)$\vec{u} = (x, -1, 4), \quad \vec{v} = (x, -3, 1)$

2.1.4. Ache a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$ nos casos:

a) $\vec{w} = (1, -1, 2), \quad \vec{v} = (3, -1, 1)$

b) $\vec{w} = (-1, 1, 1), \quad \vec{v} = (-2, 1, 2)$

c) $\vec{w} = (2, 2, 0), \quad \vec{v} = (3, 1, 3)$.

2.2 Produto vetorial.

O produto vetorial entre dois vetores, **p** e **q**, é o **vetor** expresso como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad ,$$

e é definido como o vetor **v**, que satisfaz as seguintes condições:

1. A linha de ação de **v** é perpendicular ao plano que contém **p** e **q**.
2. O módulo de **v** é dado por: $v = p\, q \operatorname{sen} \theta$, onde θ é o menor ângulo entre os vetores **p** e **q**.
3. O sentido de **v** é tal que **p**, **q** e **v** formam, nesta ordem, um triedro direto.

Obs: $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$

- Exemplo físico: torque, ou momento de uma força: $\mathbf{t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Ver figura 1, abaixo.

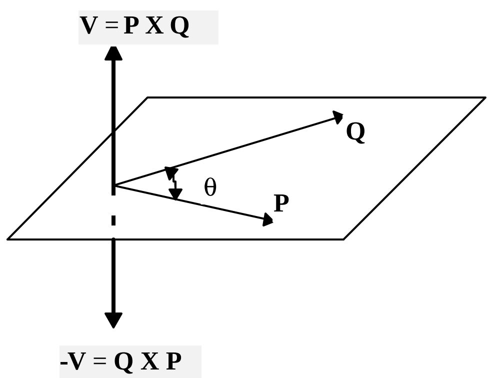
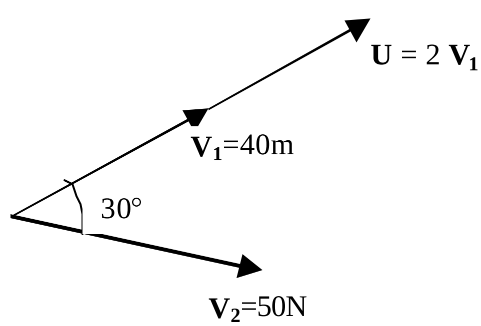


Figura 1 - *Produto Vetorial*

Exemplo:



- Produto de escalar por vetor: $\mathbf{U} = 2\,\mathbf{V_1}$
- Produto escalar: $W=\mathbf{V_1}.\mathbf{V_2}=\mathbf{V_2}.\mathbf{V_1}=40 X 50 X \cos(30^o)=1732{,}05 N.m= 1732{,}05\ J$
- Produto vetorial:

a) $\mathbf{P} = \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$
$/P/ = 40 \ X\ 50\ X \operatorname{sen}(30^o)$

Direção: Para dentro do papel.

b) **M** = **V₂** X **V₁**
/M/ = 50 X 40 X sen(30^o)
Direção: Para fora do papel.

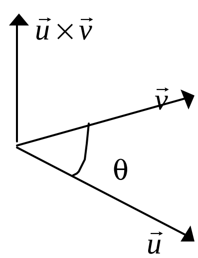
Corolário 2.6: Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^3 e sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ definidos numa base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Então, o produto vetorial(ou externo) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tal modo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ formam uma base positiva de V^3 (destrógiro). Veja a figura abaixo.



2.2.2 Propriedades do Produto Vetorial

Teorema 2.3: Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V^3 e para qualquer número real $\mathbf{l}$, tem-se:

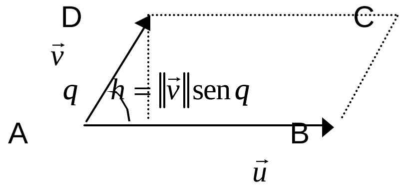
1) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, e $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

2) $\vec{u} \times (l\ \vec{v}) = (l\ \vec{u}) \times \vec{v} = l\ (\vec{u} \times \vec{v})$

3) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2.2.3 Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial.

O módulo do produto vetorial dos vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^3 é igual a área do paralelogramo determinado por eles. Veja a figura abaixo.



Área do paralelogramo ABCD = $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\,q = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

Exercícios propostos.

2.2.1. Calcule o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ nos casos abaixo.

a) $\vec{u} = (6, -2, -4), \vec{v} = (-1, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (7, 0, -5), \quad \vec{v} = (1, 2, -1)$

2.2.2. Calcule a área do paralelogramo ABCD, sendo **AB** = (1,1,-1) e **AD** = (2,1,4)

2.2.3. Calcule a área do paralelegramo determinado pelos vetores $\vec{x} = 3\vec{u} - 2\vec{v} \quad e \quad \vec{y} = \vec{u} + 3\vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, 1, -2) \quad e \quad \vec{v} = (-2, 3, 1)$

2.2.4. Determine o vetor $\vec{x}$ de norma 5 que é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1) \quad e \quad \vec{v} = (1, 1, 2)$.

2.3 Produto misto.

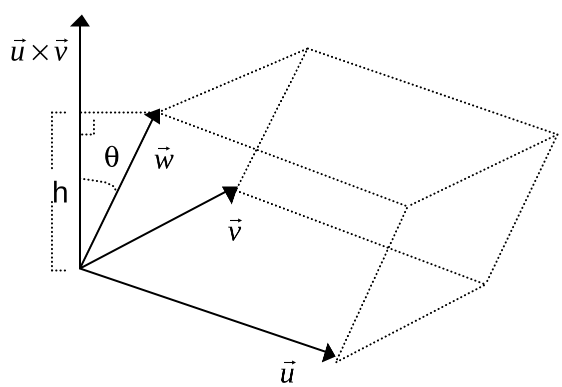
Definição 2.7: Sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V^3. Denomina-se **produto misto** de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ao número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.

Teorema 2.4: Seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva, relativamente à qual $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)\ e\ \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, então o **produto misto** de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é dado por:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2.3.2 Interpretação geométrica do módulo do produto misto

O módulo do produto misto $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$ é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelas vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ conforme exibido na figura abaixo.



Volume do Paralelepípedo = S X h
Onde, θ é a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}\ e\ \vec{w}$.

Exercícios propostos.

2.3.1. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (2,-1,3), \vec{v} = (-1, 2,-4)\ e\ \vec{w} = (3, 2,-1)$.

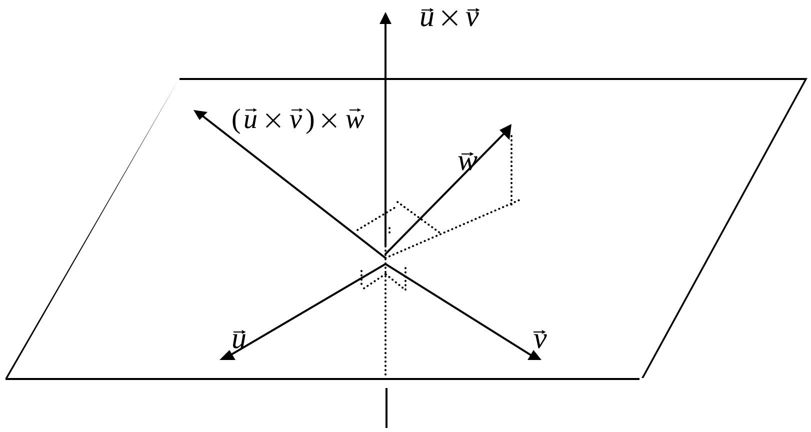
2.3.2. Os vetores $\vec{u} = (2,-1,-3), \vec{v} = (-1,1,-4)\ e\ \vec{w} = (m+1, m,-1)$ determinam um paralelepípedo de volume **42**. Calcular o valor de **m.**

2.3.3. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (2,-1,-3), \vec{v} = (-1,1,-3)\ e\ \vec{w} = (1,2,-1)$.

2.3.4. Verifique se os vetores $\vec{u} = (2,-3, 1),\ \vec{v} = (2, 5, -3)\ e\ \vec{w} = (1, 0, 4)$ são coplanares.

2.4 Duplo produto vetorial.

O produto vetorial de dois vetores quaisquer LI, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^3, é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, logo o produto vetorial desse vetor com outro vetor qualquer $\vec{w}$ de V^3 resulta num vetor que está contido no plano determinado pelos vetores iniciais $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Veja a figura abaixo.



Como os vetores $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares , implica que eles são LD, então pode-se escrever qualquer um deles como combinação linear dos outros dois. Assim, pode-se expressar o duplo produto vetorial como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ou seja

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = l\ \vec{u} + m\,\vec{v}\ .$$

Tomando-se uma base ortonormal positiva, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, após algumas manipulações algébricas determinam-se os valores dos parâmetros l e m em função dos vetores $\vec{u},\vec{v}\ e\ \vec{w}$, resultando em

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = -(\vec{v}\bullet\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}\bullet\vec{w})\vec{v}$$

Como o produto vetorial não é associativo, então refazendo todos os cálculos para $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$, resulta

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\bullet\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\bullet\vec{v})\vec{w}$$

Exemplo 2.1: Sejam os vetores $\vec{u} = (3,-2,-6), \vec{v} = (2,-1,0)\ e\ \vec{w} = (1,3,4)$. Calcule o duplo produto vetorial, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução:

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$

$(\vec{u} \bullet \vec{w}) = (3,-2,-6) \bullet (1,3,4) = 3 - 6 - 24 = -27$

$(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (3,-2,-6) \bullet (2,-1,0) = 6 + 2 + 0 = 8$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -27\vec{v} - 8\vec{w} = (-54, 27, 0) + (-8,-24,-32) = (-62, 3,-32)$

Exercícios propostos.

2.4.1. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,1),\ \vec{v} = (1,-1,0)\ e\ \vec{w} = (-1,2,2),\quad calcular$:

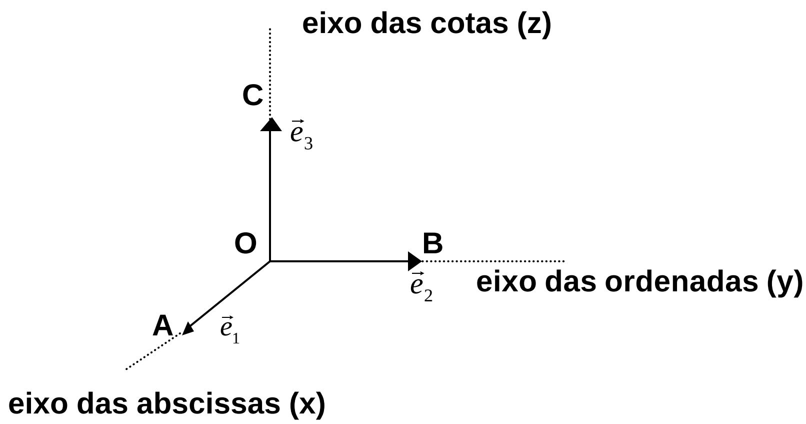
a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

3. Geometria Analítica

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas.

Definição 3.1: Sejam **O** um ponto de R^3 e E = (**e₁**, **e₂**, **e₃**) uma base de V^3. Ao par (O, E) chama-se SISTEMA DE COORDENADAS em R^3 **.** Veja a figura abaixo.



- O ponto **O** denomina-se **Origem do Sistema**.
- Sejam os vetores $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_3$. As retas determinadas pelos pontos **O** e **A**, **O** e **B**, **O** e **C** são chamadas de **Eixos Coordenados**, respectivamente **eixo dos x ou das abscissas**, **eixo dos y ou das ordenadas**, **eixo dos z ou das cotas**. São indicados respectivamente por **OX**, **OY** e **OZ**. Os planos determinados pelos pontos **O, A, B** , pelos pontos **O, A, C** e pelos pontos **O, B, C** são referidos como **planos coordenados** e chamados respectivamente de **plano OXY**, **plano OXZ** e **plano OYZ**.
- O sistema é dito **ortogonal** se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ for uma **base ortonormal** que será sempre suposta positiva.
- Dado um ponto **P** qualquer de R^3 **,** pode-se escrever:

  $$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

  Onde, os números **x, y, z** estão univocamente determinados pelo sistema e pelo ponto **P**. Esses números são chamados coordenadas de **P** em relação ao sistema **(O,B).** Pode-se, então, identificar o ponto **P** com a tripla ordenada (x, y, z) ou seja

  $$P = (x, y, z) \qquad [ou \quad P(x, y, z)]$$

Teorema 3.1: Seja o sistema de coordenadas **(O, E),** definido acima. Se $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $v = (a, b, c)$ e $\lambda \in R$ e , então:
a) **AB** = $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

a) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

b) $A + l\ \vec{v} = (x_1 + l\ a, y_1 + l\ b, z_1 + l\ c)$

Distância entre dois pontos

Definição 3.2: Seja o sistema de coordenadas ortogonal (O, E), onde $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal. A distância entre os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é calculada pela seguinte fórmula:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo 3.1: Calcule a distancia entre os pontos $A = (2, 6, -5)$ e $B = (6, 9, 7)$ cujas coordenadas se referem a um sistema ortogonal.

Solução:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(6-2)^2 + (9-6)^2 + (7-(-5))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Exercícios propostos.

3.1.1**.** Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos A = (0, 1, 2) , B = (-1, 0, -1) e C = (2, -1, 0)**.**

3.1.2. Calcule a área do triângulo formado pelos pontos A, B e C, onde A = (0, 0, 0) , B = (1, -3, 1) e C = (1, 1, 4)

3.1.3. Dados os pontos A = (1, 0, 2), B = (-1, 0, 3) e C = (2, 4, 1), determinar as coordenadas do ponto D, tal que A, B, C e D formem um paralelogramo.

Calcule a área do paralelogramo ABCD, sendo A = (1, 0, 2), B = (-1, 0, 3) e C = (2, 4, 1).

3.2 Estudo da reta.

3.2.1 Equação vetorial da reta

Sejam a reta **r** que passa por um ponto **A** e um vetor $\vec{v}$ não-nulo paralelo a **r**. Veja a figura abaixo. Então, qualquer ponto **X** do espaço R^3 pertence a **r** se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes, isto é, se $l \in R$ então pode-se escrever:

$$\overrightarrow{AX} = l\ \vec{v} \quad ou \quad X = A + l\ \vec{v} \qquad (1)$$

A equação (1) chama-se **Equação Vetorial** da reta **r** e escreve-se:

r : $X = A + l\ \vec{v}$

Onde $\vec{v}$ é chamado ***vetor diretor*** da reta **r** e l é denominado de ***parâmetro .***

Observações:

1. A equação (1) não é única . Se for escolhido outro ponto de **r** , por exemplo **B** diferente de **A**, então $X = B + l\ \vec{v}$ é também uma equação vetorial de **r.** Ou se for escolhido outro vetor de V^3 paralelo a $\vec{v}$, por exemplo $\vec{w}$, então $X = A + l\ \vec{w}$ é também uma equação vetorial de **r.**
2. O ponto **X** é chamado ponto genérico da reta **r** , isto é, se l percorrer todo o conjunto dos números reais, **X** dado por (1) reproduzirá todos os pontos da reta **r** desde $-\infty$ até $+\infty$.

3.2.2 Equações paramétricas da reta

Seja o sistema de coordenadas ortogonal (O,B), onde $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal, em relação ao qual sejam dados

$$X = (x, y, z)$$
$$A = (x_0, y_0, z_0)$$
$$\vec{v} = (a, b, c)$$

onde, $\vec{v} \neq \vec{0}$, isto é, **a**, **b**, **c** não são todos nulos.

Substituindo-se na equação (1), resulta:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + l\ (a,b,c)$$

donde vem

$$(x,y,z) = (x_0 + l\ a, y_0 + l\ b, z_0 + l\ c)$$

ou

$$\begin{cases} x = x_0 + l\ a \\ y = y_0 + l\ b \qquad e \qquad l \in R \\ z = z_0 + l\ c \end{cases} \qquad (2)$$

As equações (2) são chamadas ***Equações Paramétricas*** da reta **r** e l é chamado de **parâmetro**.

Observações:

1. Se a reta **r** passar pelos pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então, pode-se tomar $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e tem-se para ***equações paramétricas*** da reta r as seguintes:

$$X = A + l\ \overrightarrow{AB} \quad \therefore \quad (x,y,z) = (x_1, y_1, z_1) + l\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ou

$$\begin{cases} x = x_1 + l\ (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + l\ (y_2 - y_1) \qquad e \qquad l \in R \\ z = z_1 + l\ (z_2 - z_1) \end{cases} \qquad (3)$$

2. Se na equação (2) se tiver $a \neq 0, b \neq 0\ e\ c \neq 0$, então pode-se eliminar o l **e** pode-se escreve**:**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (4)$$

As equações (4) são chamadas equações da reta **r** na ***Forma Simétrica***.

Exercícios propostos.

3.2.1. Escreva as equações vetorial e paramétricas da reta **r** que passa pelos pontos A = (4, 1, 2) e B = (3, 2, 3) **.**

3.2.2**.** Escreva as equações paramétricas da reta **r** que passa pelo ponto A=(4, 0,-3) e é paralela ao vetor $\vec{u} = (2,4,5)$.

3.2.3. Dada a reta **r:** X = (1,0,0) + λ(1, 1, 1) e os pontos A = (1,1,1), B = (0, 0, 1), ache o ponto de **r** equidistante de A e B.

3.2.4. Determinar as equações das seguintes retas**:**

a) reta que passa por A = (1, -2, 4) e é paralela ao eixo dos x;

b) reta que passa por B = (2,3,4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y.

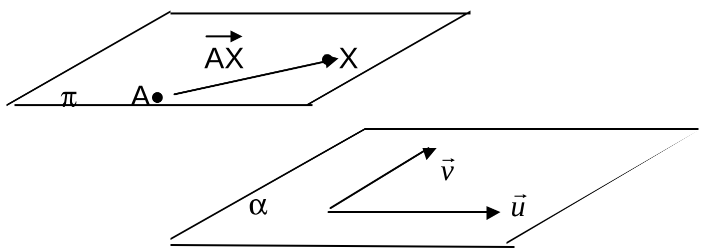
3.2.5. Dados A = (0, 2, 1), r: X = (0, 2 -2) + λ(1, -1, 2), ache os pontos de **r** que distam **2**(duas) unidades de comprimento do ponto A.

3.3 Estudo do Plano.

3.3.1 Equação vetorial do plano.

Seja o plano **p** de R^3. Sejam um ponto **A Î p** e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos, linearmente independentes e paralelos a **p**. Veja a figura abaixo, os planos **a** e **p** são paralelos. Então, qualquer ponto **X** do espaço R^3 pertence a **p** se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes, isto é, se $l\ , m \in R$, então pode-se escrever:

$$\textbf{p}: \quad \overrightarrow{AX} = l\ \vec{v} + m\vec{u} \qquad \textbf{(1)}$$



A equação (1) é denominada **Equação Vetorial** do plano **p**. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados **Vetores Diretores** do plano **p**.

Se $A, B\ e\ C$ são pontos distintos e não colineares de **p**, pode-se tomar como vetores diretores de **p** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ e\ \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e então uma equação vetorial do plano **p** pode ser escrita como segue

$$X = A + l\ \overrightarrow{AB} + m\ \overrightarrow{AC} \quad onde \quad l, m \in R \qquad (2)$$

3.3.2 Equações paramétricas do plano

Seja o sistema de coordenadas ortogonal (O,B), onde $B = (\vec{i}\,, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal, em relação ao qual sejam dados

$$X = (x, y, z)$$
$$A = (x_0, y_0, z_0)$$
$$\vec{u} = (a, b, c)$$
$$\vec{v} = (m, n, p)$$

onde, $\vec{u} \neq \vec{0}\ e\ \vec{v} \neq \vec{0}$. Substituindo-se na equação (1) resulta:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + l\ (a, b, c) + m\ (m, n, p)$$

ou

$$(x, y, z) = (x_0 + l\ a + m\,m, y_0 + l\ b + m\,n, z_0 + l\ c + m\ p)$$

ou

$$\begin{cases} x = x_0 + l\ a + m\,m \\ y = y_0 + l\ b + m\,n \qquad e \qquad l, m \in R \\ z = z_0 + l\ c + m\ p \end{cases} \qquad (3)$$

As equações (3) são chamadas **Equações Paramétricas** do plano **p**.

Se $A = (x_1, y_1, z_1),\ B = (x_2, y_2, z_2)\ e\ C = (x_3, y_3, z_3)$ são pontos distintos e não colineares de **p**, pode-se tomar como vetores diretores de **p**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

As Equações Paramétricas do plano **p** são obtidas a partir da equação (2) e tomam a seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_1 + l\ (x_2 - x_1) + m\,(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + l\ (y_2 - y_1) + m\,(y_3 - y_1) \quad onde \quad l\ , m \in R \\ z = z_1 + l\ (z_2 - z_1) + m\,(z_3 - z_1) \end{cases} \qquad (4)$$

3.3.3 Equação geral do plano.

Seja o sistema de coordenadas ortogonal (O,B), onde $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal e seja **p** um plano que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$, paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{u} = (r, s, t)$, $\vec{v} = (m, n, p)$. Então, o ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano **p** se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ forem linearmente dependentes, isto é, se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, desenvolvendo por Laplace esse determinante relativamente a primeira linha, se, somentes se,

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = 0$$

donde

$$x\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} - x_0\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} + y_0\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix} - z_0\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (5)$$

onde

$$a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} \quad , \quad b = \begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} \quad , \quad c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$d = -x_0\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} - y_0\begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} - z_0\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$$

A equação (5) é uma **Equação Geral** do plano **p**.

Exercícios propostos.

3.3.1. Escreva equações vetorial e paramétricas para o plano p que passa pelos pontos A=(1,0,1), B=(2, 1,-1) e C=(1,-1,0).

3.3.2. Obtenha a equação geral do plano que passa pelos pontos A = (1,0,1), B = (2, 1,-1) e C = (1, -1, 0) .

3.3.3. Obtenha as equações gerais dos planos **p** descritos abaixo:

a) **p** passa por A = (1, 0, 1) e B = (0, 1, -1) e é paralelo ao segmento CD , onde C = (1, 2, 1) e D = (0, 1, 0).

b) **p** passa pelos pontos A = (1, 0, 2) , B = (-1, 1, 3) e C = (3, -1, 1).

3.3.4. Escreva as equações vetorial e paramétricas do plano que passa pelos pontos A = (-3, 1, -2) e B = (-1, 2, 1) e é paralelo àreta s: X = (-1, 2, 0) + λ(1, 3, 1).

3.3.5. Escreva as equações vetorial e paramétricas do plano que passa pelos pontos A = (-3, 1, -2) e B = (-1, 2, 1) e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

3.3.4 Vetor normal ao plano.

Seja o sistema de coordenadas ortogonal (O,B), onde $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal. Seja **p** um plano de $\mathbf{R}^3$. Denomina-se vetor normal a **p** a um vetor qualquer de V^3, $\vec{n} \neq \vec{0}$, ortogonal a **p** e , portanto, ortogonal a qualquer vetor paralelo a **p** .

Sejam o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ de **p**, um vetor $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ normal a **p** e um ponto qualquer de **p** , X = (x, y, z) , então pode-se escrever (veja a figura abaixo):

$$\overrightarrow{AX} \bullet \vec{n} = 0$$

ou

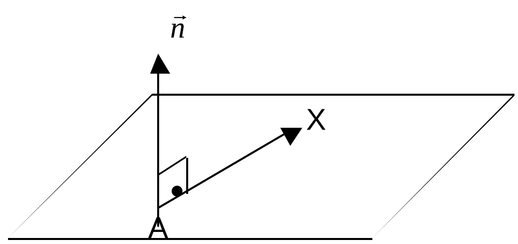
$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

ou

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (6)$$

onde,

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$



A equação (6) é uma equação geral do plano **p** , tendo como coeficientes das variáveis **x**, **y** e **z** as coordenadas do vetor normal ao plano na ordem correspondente.

Exemplo 3.2: Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A = (0, 2, 1) e tem um vetor normal $\vec{n} = (-1, 3, 2)$.

Solução:

Lembrando que na equação (6) os coeficientes **a, b, c** de **x, y** e **z** são , na ordem correspondente, os coordenadas do vetor normal ao plano **p**, então tem-se:

a = -1,
b = 3,
c = 2.

E x_0, y_0, z_0 são as coordenadas de um ponto A do plano **p** , então tem-se:

$x_0 = 0,$

$y_0 = 2,$

$z_0 = 1.$

Logo, substituindo-se em (6), a equação geral do plano pedida é a seguinte:

$$d = -(-1)\times 0 - 3\times 2 - 2\times 1 = 0 - 6 - 2 = -8$$

$$-x + 3y + 2z - 8 = 0$$

3.4. Posições Relativas entre Retas e Planos.

3.4.1 Posições relativas de duas retas.

Duas retas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Se forem paralelas podem ainda serem coincidentes ou distintas.

Considere um sistema de coordenadas ortonormal ou canônico, duas retas quaisquer ***r*** e ***s*** de $\mathbf{R}^3$ e sejam $\vec{u} = (a,b,c)\ e\ \vec{v} = (m,n,p)$ vetores diretores de ***r*** e ***s*** **,** respectivamente. Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer de ***r*** e $B = (x_2, y_2, z_2)$ um ponto qualquer de ***s*****,** então pode-se estabelecer as seguintes assertivas:

1. As retas ***r*** e ***s*** são reversas se, e somente se os vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \overrightarrow{AB}$ são LI ou seja, se e somente se:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. As retas ***r*** e ***s*** são paralelas se, e somente se, os vetores diretores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são LD, isto é, se, e somente se, existe $l \in R$ tal que :

$$\vec{u} = l\vec{v} \qquad donde\ \ vem:$$

$$a = l m, \quad b = l n, \quad c = l\ p \quad ou$$

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = l \ \text{(constante)}$$

3. As retas ***r*** e ***s*** são concorrentes se, e somente se, são coplanares e não são paralelas, ou seja se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad (\vec{u}, \vec{v})\ \ são\ \ LI\ .$$

Exemplo 3.3: Verifique se as retas **r : X = (1,2,3) + l(0,1,3)** e **s : X = (1,3,6)+m(0,2,6)** são paralelas ou concorrentes.

Solução:

Das equações vetoriais de **r** e **s** acima, obtém-se que $\vec{u} = (0,1,3)$ e $\vec{v} = (0,2,6)$ são, respectivamente, vetores diretores de **r** e **s.** Donde, por inspeção, obtém-se:

$$\vec{v} = 2\vec{u}$$

Logo, **r** e **s** são paralelas.

3.4.2 Posições relativas de reta e plano.

Uma reta em relação a um plano pode ser paralela ou transversal. Se for paralela pode ainda estar contida ou não no plano.

Considere um sistema de coordenadas ortonormal ou canônico, uma reta qualquer ***r*** e um plano qualquer ***p*** de $\mathbf{R}^3$. Então, usando a teoria dos conjuntos pode-se afirmar:

1. A reta ***r*** está contida no plano ***p*** se, e somente se, $r \cap \boldsymbol{p}$ contiver infinitos pontos;
2. A reta ***r*** é paralela ao plano ***p*** se, e somente se, $r \cap p$ for o conjunto vazio;
3. A reta ***r*** é transversal ao plano ***p*** se, e somente se, $r \cap p$ contiver um único ponto.

Para se equacionar este problema, assuma as seguintes equações da reta e do plano:

$$r : X = (x_0,\, y_0,\, z_0) + l\ (m,\, n,\, p)$$

$$p : ax + by + cz + d = 0$$

Tomando-se as equações paramétricas da reta ***r*** , obtém-se, então, o seguinte sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e λ :

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,l \\ y = y_0 + n\,l \\ z = z_0 + p\,l \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

ou equivalentemente;

$$\begin{cases} 1.x + 0y + 0z - m\,l - x_0 = 0 \\ 0x + 1.y + 0z - n\,l - y_0 = 0 \\ 0x + 0y + 1.z - p\,l - z_0 = 0 \\ ax + by + cz + 0\,l + d = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer, sabe-se que este sistema tem solução única se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

e calculando o determinante, resulta:

$$ma + nb + pc \neq 0\,.$$

Portanto, essa é a condição para a reta ***r*** ser **transversal** ao plano ***p*** . E, por outro lado, a condição para a reta ***r*** ser **paralela** a ***p*** é:

$$ma + nb + pc = 0\,.$$

Para verificar se a reta ***r*** está contida em ***p*** , basta tomar um ponto de ***r*** e substituí-lo na equação do plano ***p***. Se o ponto satisfaz a equação, então a reta ***r*** está contida em ***p*** , caso contrário a reta ***r*** é paralela a ***p*** .

Exemplo 3.4: Determine o valor de **a** para que a reta **r : X = (2,1,-3) + l(1,1,-2)** seja paralela ao plano **p : a x+y+2z-1=0**

Solução: Examinando as equações da reta **r** e do plano **p** , verifica-se que um dos vetores diretores da reta **r** é $\vec{v} = (1, 1, -2)$ e um vetor normal ao plano **p** é $\vec{n} = (a\,, 1,\ 2)$, então, pode-se escrever:

$$1 \times a \ + 1 \times 1 - 2 \times 2 = 0 \quad \therefore \quad a = 3$$

3.4.2 Posições relativas de plano e plano.

Um plano em relação a outro plano pode ser paralelo ou transversal. Se for paralelo pode ainda coincidente com o outro plano.

Considere um sistema de coordenadas ortonormal ou canônico. Sejam $p_1 \; e \; p_2$ dois planos de $\mathbf{R}^3$ cujas equações gerais são, respectivamente,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

É fácil de se concluir por pura visualização que para os planos $p_1 \; e \; p_2$ serem paralelos seus vetores normais também tem que serem paralelos ou seja

$\vec{n}_1 = l \ \vec{n}_2 \quad \therefore \quad a_1 = l \ a_2 , \quad b_1 = l \ b_2 \quad c_1 = l \ c_2$ ou ainda

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = l$ (constante) . Se também $\dfrac{d_1}{d_2} = l$, então $p_1 \; e \; p_2$ são coincidentes.

Caso contrário são transversais.

Exemplo 3.5: Verifique se os planos $p_1 : 2x - y + z - 1 = 0 \; e \; p_2 : 4x - 2y + 2z - 9 = 0$ são paralelos.

Solução:

Das equações gerais de $p_1 \; e \; p_2$ obtém-se que $\vec{n}_1 = (2, -1, +1) \; e \; \vec{n}_2 = (4, -2, 2)$ são, respectivamente, vetores normais a $p_1 \; e \; p_2$. Por inspeção verifica-se que

$$\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1 \ .$$

Logo, $p_1 \; e \; p_2$ são planos paralelos. Porém, não são coincidentes já que $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{1}{2}$

Exercícios propostos

3.4.1. Estude a posição relativa das retas *r* e *s* nos seguintes casos:

a) $r : X = (1, -1, 1) + l\,(-2, 1, -1) \qquad s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

b) $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2} \qquad s : (0,\ 0,\ 0) + l\ (1,\ 2,\ 0)$

3.4.2. Estude a posição relativa da reta *r* e do plano *p* nos seguintes casos:

a) $r : (1, 1, 0) + l\ (0, 1, 1) \qquad p : x - y - z = 2$

b) $r : \dfrac{x-1}{2} = y = z \qquad p : X = (3, 0, 1) + l\ (1, 0, 1) + m\,(2,\ 2,\ 0)$

3.4.3. Estude a posição relativa dos planos $p_1 \ e \ p_2$ nos seguintes casos:

a) $\begin{cases} p_1 : (1, 1, 1) + l\,(0, 1, 1) + m\,(-1, 2, 1) \\ p_2 : (1, 0, 0) + l\,(1, -1, 0) + m\,(-1, -1, -2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} p_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ p_2 : 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

3.5. Distâncias.

3.5.1 Distância de ponto a ponto.

Sejam um sistema de coordenadas ortogonal, os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, como já foi visto na seção 2.1, a distância entre A e B é calculada pela seguinte fórmula:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3.5.2 Distância de ponto a reta.

Dados o ponto ***P*** e a reta ***r***, para se calcular a distância ***d(P, r)*** de ***P*** a ***r***, pode-se achar ***M***, a projeção ortogonal de ***P*** sobre ***r***, e calcular $\|\overrightarrow{PM}\|$, que é a distância procurada.

Porém, existe um outro processo no qual não é necessário se determinar ***M***. O resultado desse processo pode se estabelecida pela seguintes definição:

Definição 3.3: Sejam $\vec{v}$ um vetor diretor de ***r*** e ***A*** um ponto qualquer de ***r***, então, pode-se provar que a distância ***d(P, r)*** de ***P*** a ***r*** pode ser obtida por:

$$d(P, r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 3.6: Calcule a distância do ponto P = (1, 1, -1) à reta ***r***: (-1, -2, -3) +λ(1, 1, 2).

Solução:

Da equação da reta, vem A = (-1, -2, -3) e $\vec{v} = (1, 1, 2)$ e então $\overrightarrow{AP}$ = (2, 3, 2). Substituindo-se na fórmula da distância, vem:

$$d(P, r) = \frac{\|(2, 3, 2) \times (1, 1, 2)\|}{\|(1, 1, 2)\|} = \frac{\|(4, -2, -1)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

3.5.3 Distância de ponto a plano.

Dados um ponto ***P*** e um plano π, para achar a distância ***d(P, π)*** de ***P*** a π, pode-se achar a projeção ortogonal de ***P*** em π, e daí ***d(P, π)*** = $\|\overrightarrow{PM}\|$.

Entretanto, como no caso da distância entre ponto e reta, aqui também existe um processo de encontrar a distância entre ***P*** e π sem ter que determinar ***M.***

Definição 3.4 : Sejam $P = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Então, pode-se provar que a distância de ***P*** a π, pode ser obtida por:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 3.7: Calcule a distância do ponto ***P*** = (1, 2, -1) ao plano π:3x - 4y - 5z + 1 = 0.

Solução:

Da equação do plano, vem: a=3, b=-4, c=-5 e de P vem: $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = -1$. Substituindo-se na fórmula, vem:

$$d(P,\pi) = \frac{|3.1 - 4.2 - 5(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

EXERCÍCIO